Revista Colombiana de Física,Vol. 41, No.2, Abril 2009

# Teorema de Earnshow en Dimensiones Extra

César Beleño [a], Damián Mayorga [a], Jairo Alexis Rodríguez [a]

[a]*Departamento De Física, Universidad Nacional de Colombia, Sede Bogotá*

Recibido 23 de Oct. 2007; Aceptado 6 de Mar. 2009; Publicado en línea 30 de Abr. 2009

**Resumen**

Se discute la validez del teorema electrostático conocido como Teorema de Earnshaw considerando el caso de dimensiones espaciales adicionales sin compactificar y el de una dimensión extra compactificada sobre el orbifold $S^1/Z_2$. Se observa que para el caso de dimensiones extra no compactificadas sigue siendo válido el Teorema de Earnshaw. Sin embargo el potencial obtenido para la dimension adicional compactificada no satisface la ecuación de Laplace en 3-D, por lo que la forma clásica en que se prueba el teorema deja de tener validez. Se discuten algunas alternativas para tener puntos de equilibrio estable y se concluye que si estos existen la separación entre cargas debe ser del orden del parámetro de compactifica-ción de la dimensión extra.

***Palabras Clave*:**Teorema de Earnshow, ccuación de Laplace, dimensiones extra, compactificación

**Abstract**

The electrostatic theorem known as Earnshow theorem is discussed taking into account the cases of not compactified additional spatial dimensions and one extra dimension compactified using the $S_1/Z_2$ orbifold. We note that theorem is valid in the case of additional spatial dimensions without compactification. But in the case of one compactified extra dimension, the potential does not satisfy the Laplace equation in 3-D. Because of this, it is not possible to demonstrate the Earnshow theorem in the usual form; we discuss some possibilities in order to get stable equilibrium and we conclude that if these configurations exist then the distance between charges should be of the order of the compactification parameter of the extra dimension.

***Keywords*:** Earnshow theorem, Laplace equation, extra dimensions, compactification



## 1. Introducción

El hecho de que las distribuciones continuas de carga sean idealizaciones de configuraciones de cargas puntuales fue usado por Earnshow para afirmar que: «*Un cuerpo cargado sometido a la influencia de un campo eléctrico no puede permanecer en equilibrio estable bajo la influencia exclusiva de fuerzas electrostáticas* »[1]. Earnshow probó que si toda distribución de carga es una superposición de cargas puntuales y se desea encontrar los puntos donde se presenta equilibrio estable para una cierta configuración, estos puntos deben estar en posiciones libres de carga. De acuerdo con la ley de Gauss, en estos puntos, el potencial debe cumplir la ecuación de Laplace[2]. Por lo que se considera una región conexa $\mathcal{C}$ alrededor de un punto $\mathbf{r}'$ donde sigue siendo válida dicha relación.

Sea $\phi$ el potencial electrostático, y una esfera de radio $R$ contenida en $\mathcal{C}$, al aplicar la identidad de Green para: el potencial y una función $\psi = |\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^{-1} - R^{-1}$ y usando el hecho de que $\phi$ cumple la ecuación de Laplace, se deduce que el promedio del potencial sobre la superficie de la esfera coincide con el valor de la función en el centro. Este resultado se sigue cumpliendo para toda

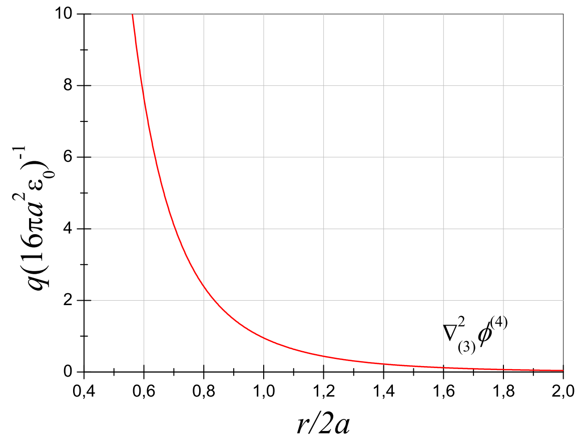


Figura 1. Laplaciano en 3-D del potencial compactificado

esfera centrada en el punto con radio menor que $R$. Si ademàs suponemos que en $\mathbf{r}'$ el potencial presenta un mínimo y se construye una esfera centrada en este punto, el promedio del potencial sobre la esfera es igual al valor en el centro. Para que esto ocurra debe haber puntos sobre la superficie donde el potencial asuma valores menores que $\phi(\mathbf{r}')$, y esto contradice la hipótesis inicial. Por tanto, no puede haber puntos de equilibrio estable en regiones del espacio donde el potencial cumpla la ecuación de Laplace[1].

## 2. N dimensiones espaciales sin compactificación

ara el potencial electrostático en $N$ dimensiones, se supone válida la ley de Gauss, es decir, el flujo de campo eléctrico a través de la superficie ($\mathcal{S}_N$) de un hipervolumen ($\mathcal{V}_N$) es proporcional a la cantidad de carga contenida dentro del mismo:

$$\int_{\mathcal{S}_N} \mathbf{E}^{(N)} \cdot \widehat{\mathbf{r}} dS_N = \frac{1}{\epsilon_0^{(N)}} \int_{\mathcal{V}_N} \rho(\mathbf{r}) dV_N \qquad (1)$$

Aplicando el teorema de Green para la parte izquierda de la ecuación (1) y sabiendo que $\mathbf{E}^{(N)}(\mathbf{r}) = -\nabla\phi^{(N)}(\mathbf{r})$, se obtiene: $\nabla^2\phi^{(N)} = -\nabla \cdot \mathbf{E}^{(N)} = -\rho/\epsilon_0^{(N)}$. Al considerar una carga puntual $q$ en el cento de la hiperesfera $\mathcal{V}_N$ de radio $r$ situada en la posición $\mathbf{r}'$; por isotropía del espacio, el campo eléctrico debe ser constante sobre todos los puntos de la superfice. Si suponemos además que el campo eléctrico es paralelo al vector $\mathbf{r} - \mathbf{r}'$ tal como ocurre en dos y tres dimensiones y haciendo $\int_{\mathcal{S}_N} dS_N = S_N(r)$, la ecuación anterior toma la forma:

$$\mathbf{E}^{(N)}(\mathbf{r}) = \frac{q}{\epsilon_0^{(N)} S_N(r)} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|} \qquad (2)$$

Sabiendo que la superficie de una hiperesfera $N$-dimensional satisface la relación[3]: $S_N = k^{(N)} r^{N-1}$, con $k^{(N)} = 2\pi^{N/2}\Gamma(N/2)^{-1}$ y reemplazando este resultando en (2) se llega a que el campo eléctrico debido a una carga puntual es de la forma:

$$\mathbf{E}^{(N)}(\mathbf{r}) = \frac{q}{k^{(N)}\pi^{N/2}\epsilon_0^{(N)}} \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}'}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^N} \qquad (3)$$

Sea una función $\psi(|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|)$ tal que $\psi(R) = 0$ y $\nabla\psi = -(\mathbf{r} - \mathbf{r}')/|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^N$; reemplazando esta definición en (20), usando el hecho de que para una carga puntual situada en $\mathbf{r}'$ la densidad de carga viene dada por $\rho = q\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$ y usando la ley de Gauss, se deduce que $\nabla^2\psi = -k^{(N)}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{r}')$.
Considérese una función de potencial $\phi$ debido a una cierta configuración electrostática, si un punto $\mathbf{r}'$ se encuentra libre de carga, se debe cumplir la ecuación de Laplace en una región conexa alrededor de este punto, sea $\mathcal{V}_N$ una hiperesfera de radio $R$ centrada en $\mathbf{r}'$ y $\mathcal{S}_N$ la superficie asociada a la misma, aplicando la identidad de Green en $N$ dimensiones[4] para $\psi$ y $\phi$ y tomando en cuenta que $\phi$ cumple la ecuación de Laplace:

$$\int_{\mathcal{V}} \phi\nabla^2\psi dV_N = -|\nabla\psi(R)| \oint_{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|=R} \phi dS_N$$

y aplicando las condiciones impuestas para $\psi$ se obtiene:

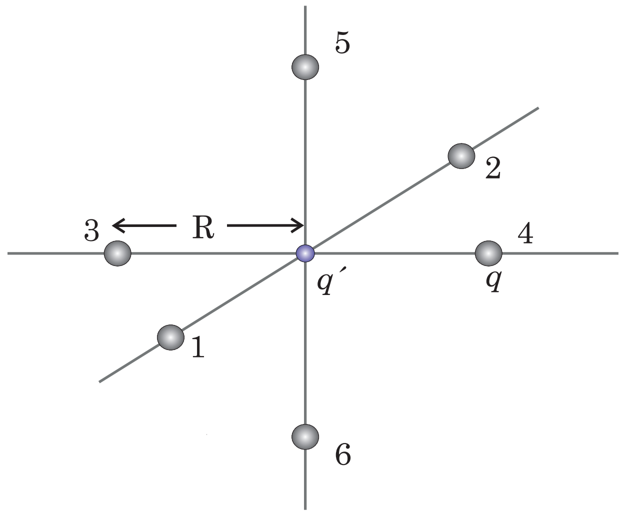


Figura 2. Configuracion de cargas estudiada

$$\phi(\mathbf{r}') = \frac{1}{S_N(R)}\oint_{\mathcal{S}_N}\phi dS_N = \langle\phi\rangle_{\mathcal{S}_N(R)} \qquad (4)$$

La ecuación anterior posee el mismo significado que la obtenida por Earnshow para tres dimensiones, por lo que es imposible obtener posiciones de equilibrio estable con potenciales electrostáticos para cualquier espacio $N$-dimensional.

## 3. Una dimensión extra compactificada

Se considera un espacio con cuatro coordenadas espaciales $(x, y, z, w)$ y a la cuarta se asocia la identificación[5] $w \sim w + 2\pi a$, esta operación caracteriza al orbifold $S_1/Z_2$ y su significado es que cualquier cantidad $\alpha$ es periodica en $w$, es decir: $\alpha(x, y, z, w) = \alpha(x, y, z, w + 2n\pi a)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Al suponer que en este espacio sigue siendo válida la ley de Gauss para el potencial electrostático: $\nabla^2\phi^{(4)} = -\rho/\epsilon_0^{(4)}$ y aplicando la identificación al potencial se tiene que $\phi^{(4)}$ debe cumplir: $\phi^{(4)}(x, y, z, w) = \phi^{(4)}(x, y, z, w + 2n\pi a)$. Para calcular el potencial debido a una carga puntual $q$ en el origen, la densidad de carga se escribe como producto de funciones delta: $\rho = q\delta(x)\delta(y)\delta(z)\delta(w)$ y el potencial $\phi^{(4)}$ se expresa como producto de transformadas de Fourier:

$$\phi^{(4)} = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{3}{2}}}\sum_{n=-\infty}^{\infty}\int a(\mathbf{k}, n)e^{i\frac{n}{a}w}e^{ik_x x + ik_y y + ik_z z}d^3k \qquad (5)$$

Donde $\mathbf{k} = (k_x, k_y, k_z)$. Calculando el laplaciano de (5), igualando al cociente $-\rho/\epsilon_0^{(4)}$, aplicando relaciones de completez para la densidad de carga y usando condiciones de independencia lineal se encuentra el coeficiente $a(k_x, k_y, k_z, n)$; después de reemplazar en la ecuación anterior se obtiene:

$$\phi^{(4)} = \frac{q}{\epsilon_0^{(4)}}\frac{1}{(2\pi)^2}\frac{1}{r}\int_0^\infty \coth(\pi a k)\sin(kr)dk$$

Tomando el valor principal de Cauchy:

$$\phi^{(4)}(r) = \left(\frac{1}{4\pi(2\pi a\epsilon_0^{(4)})}\right)\frac{q}{r}\coth\left(\frac{r}{2a}\right) \qquad (6)$$

Nótese que en el caso $r \gg a$: $\coth(r/2a) \to 1$, con lo que $\phi^{(4)}(r) = q(4\pi(2\pi a\epsilon_0^{(4)}))^{-1}r^{-1}$; este potencial presenta la misma estructura funcional del potencial electrostático en tres dimensiones, luego $\epsilon_0 = 2\pi a\epsilon_0^{(4)}$. Calculando el laplaciano tridimensional del potencial indicado en (6):

$$\nabla^2_{(3)}\phi^{(4)} = \frac{1}{4\pi(2\pi a\epsilon_0^{(4)})}f(\mathbf{r}) \qquad (7)$$

Donde $f(\mathbf{r}) = -4\pi\delta(r)\coth\left(\frac{r}{2a}\right) + \frac{1}{2ar}\coth\left(\frac{r}{2a}\right)\mathrm{csch}^2\left(\frac{r}{2a}\right)$. Este potencial no cumple la ecuación de Laplace en 3 dimensiones, por lo que la identidad de Green no puede aplicarse para probar que este potencial no presenta puntos de equlibrio estable. Para visualizar mejor el comportamiento del mismo, se considera una distribución de cargas iguales $q$ dispuestas de la manera indicada en la figura 2 a una distancia $R$ del origen y una carga $q'$ en este punto, allí los campos eléctricos se anulan por pares, luego el campo eléctrico neto en este punto es cero. El potencial total se puede escribir como la suma de los potenciales debidos a cada una de las cargas $q$ ($\phi = \sum_{k=1}^{6} \phi_k^{(4)}$), de este modo el trabajo[6] $\Delta W$ para desplazar la carga $q'$ en $\Delta \mathbf{r}$ está dado por:

$$\Delta W = q' \sum_{k=1}^{6} \left[ \frac{1}{2} \Delta \mathbf{r} \cdot [\nabla \nabla \phi_k^{(4)} \Delta \mathbf{r}] + ... \right] \quad (8)$$

Como $\phi^{(4)}$ depende unicamente de $r$:

$$\frac{\partial^2 \phi_k^{(4)}}{\partial x_i \partial x_j} = \delta_{ij} \frac{1}{r} \frac{d\phi_k^{(4)}}{dr} + \frac{x_i x_j}{r} \left[ -\frac{1}{r^2} \frac{d\phi_k^{(4)}}{dr} + \frac{1}{r} \frac{d^2 \phi_k^{(4)}}{dr^2} \right] \quad (9)$$

y $\phi_k^{(4)}(0) = \phi^{(4)}(|\mathbf{r}_k|)$ con $\mathbf{r}_k$ la posición de la carga k-ésima, se observa que sólo hay una coordenada no nula para cada una de las cargas, por lo que se cumple: $\partial^2 \phi_k^{(4)} / \partial x_i \partial x_j = 0$ si $i \neq j$, además los términos con $i = j$ presentan una dependencia cuadrática con la coordenada, de esta forma las componentes de cada matriz son iguales para las cargas dispuestas sobre el mismo eje; con esto la expresión para el trabajo se reduce a: $\Delta W = q' \sum_{k=1}^{3} \left[ \Delta \mathbf{r}^\dagger \cdot [\nabla \nabla \phi_{x_k}^{(4)} \Delta \mathbf{r}] + ... \right]$, donde $\phi_{x_k}^{(4)}$ corresponde al potencial debido a una carga dispuesta sobre el eje $x_k$ situada a una distancia $x_k = r = R$ del origen. De la ecuación (9) se nota que los términos no nulos de la matriz $\nabla \nabla \phi_{x_k}^{(4)}$ son iguales salvo el término $\partial^2 \phi_k^{(4)} / \partial x_k^2$, este último se notará en adelante como $\phi_R$ y los demás términos de la diagonal como $\phi_0$; usando estas definiciones la ecuación (8) toma la forma:

$$\Delta W = q' \Delta \mathbf{r}^\dagger \times \left[ \left[ \begin{pmatrix} \phi_R & 0 & 0 \\ 0 & \phi_0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_R & 0 \\ 0 & 0 & \phi_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \phi_0 & 0 & 0 \\ 0 & \phi_0 & 0 \\ 0 & 0 & \phi_R \end{pmatrix} \right] \Delta \mathbf{r} + ... \right] \quad (10)$$

Al sumar estas matrices se llega a que cada término diagonal de la matriz resultante coincide con el laplaciano del potencial $\phi^{(4)}$ evaluado en $r = R$, así (8) asume la forma:

$$\Delta W = q' \nabla_{(3)}^2 \phi^{(4)}(R) |\Delta \mathbf{r}|^2 + ... \quad (11)$$

Para la estabilidad del potencial en el origen con pequeños desplazamientos ($|\Delta \mathbf{r}| \ll a$), los términos de orden superior en la expansión son despreciables. Si se desea obtener un punto de equilibrio estable con esta cofiguración de cargas, el término $q' \nabla_{(3)}^2 \phi^{(4)}(R)$ debe ser positivo; de acuerdo con la figura 1 se debe cumplir que $qq' > 0$, esto garantiza la obtención de un punto de equlibrio estable para el potencial compactificado, con lo que se viola el teorema de Earnshow en tres dimensiones para este tipo de potenciales; sin embargo, debe notarse que el laplaciano es prácticamente nulo para $R > 2a$, por lo que de existir este tipo de configuraciones, sólo se obtendría una estabilidad eficiente si las dimensiones de la configuración son del orden del parámetro de compactificación de la dimensión extra.

## Referencias


[1] Griffiths D.; *An introduction to electrodynamics*; Prentice Hall, 1999.

[2] Barlett D., Su Y.; *What potentials permit a uniqueness theorem*; Am. J. Phys. 62 (8), Agosto 1996.

[3] Landy S.; *Gauss´ law for non inverse square forces*; Am. J. Phys. 64 (6), Junio 1996.

[4] Apostol T.; *Mathematical Analysis*; Addison-Wesley, 1974.

[5] Zwiebach B.; *A first course in string theory*; Cambridge University Press, 2004.

[6] Jackson D.; *Classical Electrodynamics*; Wiley, 1999.