



## Ecuación de Onda en Fronteras Complejas

F. Fonseca<sup>1</sup>, S. Zuluaga<sup>1</sup>

<sup>1</sup> Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, ciudad universitaria

Recibido 23 de Oct. 2007; Aceptado 6 de Mar. 2009; Publicado en línea 30 de Abr. 2009

### Resumen

Los problemas de ecuaciones diferenciales mixtos, es decir donde aparecen condiciones sobre las fronteras y sobre el estado inicial del sistema, son de gran importancia en Física y matemáticas. Normalmente, las ecuaciones se desarrollan sobre fronteras cuadradas y circulares, dejando de lado otras formas debido a su alta complejidad analítica. Usando la idea de autómatas celulares resolvimos la ecuación de onda en dos dimensiones y junto a la transformada de Fourier encontramos los valores propios y funciones propias para diferentes fronteras tales como circular, elíptica y triangular con condiciones de Dirichlet.

**Palabras claves:** Ecuación de onda, valores propios, funciones propias, transformada discreta de Fourier.

### Abstract

The mixed differential equation problems, where are conditions on the frontier and on the initial state of the system, are very important in physics and mathematics. Normally, the equations are developed on rectangular and circular frontiers due to the difficulty on solving it in complex frontiers. Using the idea of cellular automata, we solved the wave equation in one and two dimensions and using the discrete Fourier transform, we found the eigen-values and eigen-functions for different kinds of frontier such as circular, elliptical and triangular with Dirichlet boundary conditions. In general the method permits us to find the eigen-values and eigen-functions for any shape of the boundary in one and two dimensions.

**Key Words:** wave equation, eigen-values, eigen-functions, discrete Fourier transform.

©2009 Revista Colombiana de física. Todos los derechos reservados.

### 1. Introducción

Los problemas de valores y funciones propias son algunos de los más importantes en física y matemáticas y como es bien sabido el cálculo y la solución de estos puede llegar a ser muy complicada. Es por esto que en los últimos años gracias a los computadores se han desarrollado nuevos algoritmos [1,3,4] que aunque no nos proporcionan una teoría general, si nos pueden ayudar a entender el comportamiento de sistemas en problemas concretos.

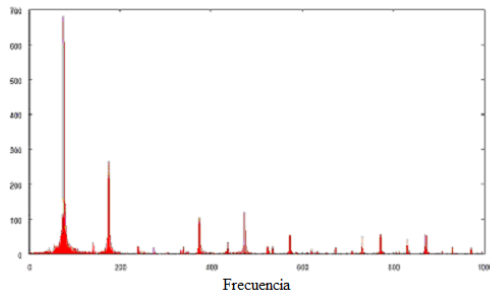
En este artículo mostramos un algoritmo basado en diferencias finitas y la transformada discreta de fourier, el cual nos permite calcular el conjunto de valores y funciones propias para la ecuación de onda clásica en una y dos di-

mensiones con condiciones de dirichlet y para cualquier forma de la frontera. En [1] se puede ver un artículo similar, en el cual se determina el tipo de condiciones sobre la frontera.

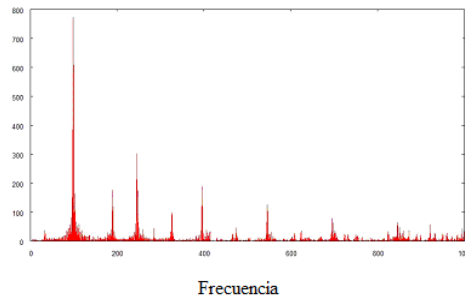
### 2. Método numérico

Para resolver la ecuación de onda, primero discretizamos la parte espacial de esta y de esta forma encontramos la aceleración en cada punto, obteniendo una ecuación de la forma:

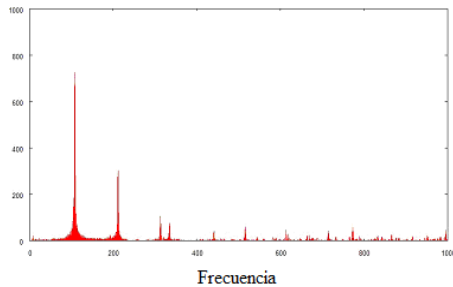
$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = f(u_{i,j}^i, u_{i-1,j}^i, u_{i+1,j}^i, u_{i,j-1}^i, u_{i,j+1}^i) \quad (1)$$



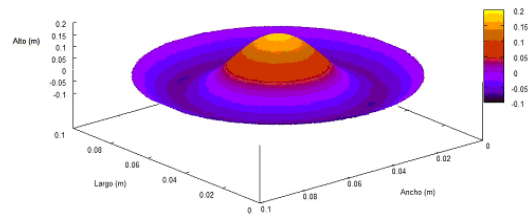
**Fig.1** Espectro de frecuencias para la frontera circular



**Fig.2** Espectro de frecuencias para la frontera elíptica



**Fig.3** Espectro de frecuencias para la frontera triangular.



**Fig.4** Modo normal de vibración para la frontera circular correspondiente a la frecuencia de 175 Hz

En este caso los subíndices denotan posición en el plano  $x,y$  mientras que los súper índices denotan tiempo. Luego usando el método de Euler, calculamos la posición de cada punto en cada paso de tiempo. Es importante anotar que los subíndices denotan posición mientras que los super índices denotan tiempo.

De esta forma podemos escribir el estado del  $u(x,y)$  como un vector de  $N \times N$  componentes, el cual lo escribimos como  $u^i_{ij}$ . De esta forma es posible describir la ecuación de onda como:

$$u^{i+1} = Au^i + Bu^{i-1} \quad (2)$$

Donde  $A$  y  $B$  son operadores que operan sobre los estados  $u^i$ .

Por último es importante anotar que no solamente es posible avanzar en el tiempo, sino que también es posible retroceder escribiendo el estado  $u^{i+1}$  en términos de los estados  $u^i$  y  $u^{i-1}$ . Más información sobre este tipo de métodos y su convergencia puede ser hallada en [2], [3] y [4]

Ya teniendo un algoritmo que soluciona la ecuación de onda, las frecuencias o valores propios las encontramos dándole una condición inicial  $f(x,y)$  al sistema y teniendo en cuenta que cualquier tipo de oscilación de este es una combinación lineal de los estados base, los cuales oscilan con su respectiva frecuencia, calculamos la transformada discreta de

Fourier de las oscilaciones de un punto del sistema, obteniendo el espectro completo de frecuencias del sistema.

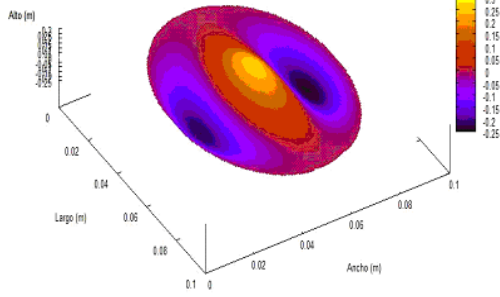
### 3. Resultados

A continuación mostramos los resultados para tres regiones distintas; una circular, una elíptica y una tercera triangular isósceles. Es importante anotar que en este caso, la velocidad de propagación de la onda es de  $10 \text{ m/s}$ , lo cual afectará los valores propios pero no las funciones propias.

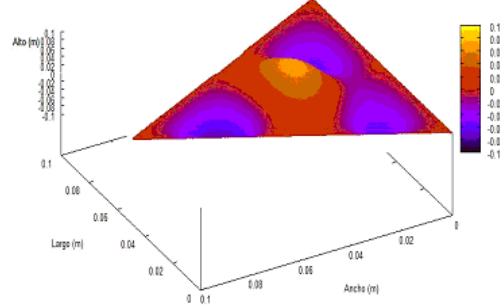
En las fig. 1, fig. 2 y fig. 3 se muestran el espectro de frecuencias para cada una de estas regiones

Y como un ejemplo, en las fig. 4, fig. 5 y fig. 6 se muestran las funciones propias correspondientes a las frecuencias 175 Hz, 245 Hz y 212 Hz para el círculo, la elipse y el triángulo isósceles respectivamente.

Estas figuras muestran tres ejemplos de modos normales de oscilación, para obtenerlas se uso la resonancia del sistema, forzándose un punto con la frecuencia de resonancia. Este mecanismo permitió que para tiempos suficientemente grandes se formaran los modos normales. Aunque puede pasar desapercibido, el punto que se escoge en la región, para forzar el sistema, es muy importante, ya que éste debe pertenecer a la frontera ó estar tan cerca como sea posible. De lo contrario no se formará el modo normal deseado.



**Fig.5** Modo normal de vibración para la frontera elíptica correspondiente a la frecuencia de 245 Hz



**Fig.6** Modo normal de vibración para la frontera elíptica correspondiente a la frecuencia de 212 Hz

## Conclusiones

Nuestro método nos permite calcular los valores propios y funciones propias de cualquier tipo de superficie, y puede ser extendido a tres dimensiones. Lo cual puede ser usado para calcular frecuencias de resonancia de estructuras complejas.

## Referencias

- [1] A. M. Akhtyamov, Identification of the Boundary Conditions of a Rectangular Membrane from Its Natural Frequencies, *Akusticheski Zhurnal*, Vol. 52, No.3, pp. 293–296, 2006
- [2] R. Courant, K. Friedrichs, H. Lewi, On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics, *Mathematische Annalen* 100, 32-74, 1928
- [3] Olivier Legrand, Fabrice Mortessagne, Patrick Sebbah, and Christian Vanneste, A Wave Automaton for Wave Propagation in Inhomogeneous Anisotropic Media, *Journal of Computational Physics* 160, 541–563, 2000
- [4] Matthew Anderson, Jung-Han Kimn, A numerical approach to space-time finite elements for the wave equation, *Journal of Computational Physics*, in press.