

Ecuación de Klein Gordon con Interacción $\lambda\psi^3$

F. Fonseca¹, S. Zuluaga¹

¹Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, ciudad universitaria

Recibido 23 de Oct. 2007; Aceptado 6 de Mar. 2009; Publicado en línea 30 de Abr. 2009

Resumen

En este artículo estudiamos el comportamiento de la ecuación de Klein Gordon, la cual es la ecuación relativística de una partícula sin spin, al igual que estudiamos la influencia de la perturbación del término $\lambda\psi^3$ en el espectro de energías permitidas para la partícula en una caja unidimensional. Este estudio lo hacemos utilizando un método numérico basado en diferencias finitas el cual nos permite resolver la ecuación con condiciones de Dirichlet en la frontera. Luego para poder calcular los valores propios, ó energías disponibles para la partícula, utilizamos la transformada discreta de Fourier, teniendo en cuenta el hecho de que cualquier tipo de estado del sistema es una combinación de los estados base de este.

Palabras claves: Valores propios, transformada de Fourier, ecuación de Klein Gordon.

Abstract

In this paper we study the behavior of the Klein Gordon equation, which is the relativistic equation of a spin less particle, also we study the influence of the perturbation term $\lambda\psi^3$ in the energy spectrum available for the particle enclosed in a one dimensional box. This study is done using a numerical algorithm based in the differential differences method, this method allow us to solve the Klein Gordon equation with Dirichlet boundary conditions. Then in order to find the energies available for the particle we use the discrete Fourier transform, using the fact that any state of the system could be written as a linear combination of its eigen-states.

Key Words: Eigen-values, Fourier transform Klein Gordon equation.

©2009 Revista Colombiana de física. Todos los derechos reservados.

1. Introducción

La ecuación en la que estamos interesados es:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \alpha u - \beta u^3 = 0 \quad (1)$$

Y en un principio se estudiará el caso en el que $\beta=0$.

Estamos interesados en el caso lineal, $\beta=0$, en la ecuación (1), la cual escribiremos como:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} = c^2 \nabla^2 \psi - \alpha \psi \quad (2)$$

Donde α esta dada por $\frac{m^2 c^4}{\hbar^2}$

Si suponemos que las funciones $\psi(x,t)$ son de la forma $\psi(x,t)=X(x)T(t)$ podemos transformar esta ecuación diferencial parcial en las siguientes dos ecuaciones ordinarias:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} = -w_n^2 T \quad ; \quad \frac{d^2 X}{dx^2} = \frac{\alpha - w_n^2}{c^2} X \quad ; \quad w_n = \frac{\sqrt{\alpha L^2 + n^2 \pi^2 c^2}}{L} \quad (3)$$

Las funciones propias $X(x)$ (los modos normales de oscilación) son los encontrados para la función de onda clásica, con la única diferencia que estas no oscilarán con las frecuencias w_n , descritas por la ecuación de onda. Para conocer cuales serán estas frecuencias, solo hace falta notar que el término que acompaña a X en la ecuación diferencial eq. (3), son justamente los valores propios w'_n , es decir, las frecuencias angulares espaciales:

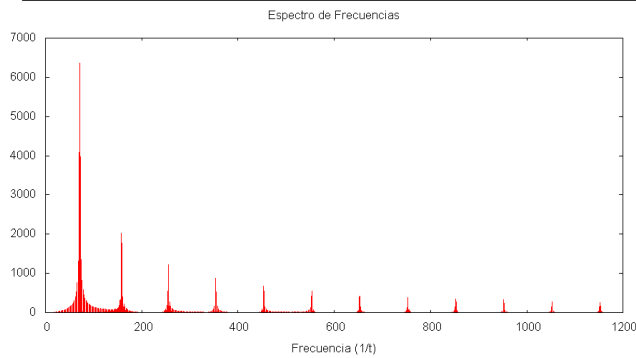


Fig.1 espectro de energía para una partícula de de masa de 10^5 MeV encerrada en una caja unidimensional de longitud 0.01 MeV $^{-1}$.

$$w'_n = \sqrt{\frac{w_n^2 - \alpha}{c^2}} \quad (4)$$

Por lo tanto, las frecuencias espaciales eq. (4), de oscilación del sistema serán menores a las encontradas al resolver la ecuación de onda clásica.

En el caso $\alpha, \beta=0$, estamos en el caso clásico de la ecuación de onda, en donde las frecuencias w son de la forma: $w_c = n\pi/L$. Más acerca de la ecuación de Klein Gordon, puede ser visto en [2], [3] y [4]

2. Método numérico

La ecuación de Klein Gordon con condiciones de dirichlet en la frontera, la resolvemos discretizando esta ecuación basándonos en el método de diferencias finitas. Más acerca de este tipo de métodos puede ser visto en [1]

Luego, teniendo en cuenta que cualquier tipo de oscilación del sistema es una combinación lineal de los estados base, los cuales oscilan con su respectiva frecuencia, calculamos la transformada discreta de fourier de las oscilaciones de un punto del sistema, obteniendo el espectro completo de frecuencias del sistema, ó en otras palabras, las energías permitidas para el sistema.

3. Resultados

Con el fin de hacer el cálculo computacional más fácil, tomamos unidades naturales y transformamos la ecuación (2) en:

$$\nabla^2 \psi - \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - m^2 \psi = 0 \quad (5)$$

En donde la constante m será 10^5 , mientras que el espacio en donde consideraremos el problema será el intervalo $(0, 0.01)$, en otras palabras estamos simulando una partícula de masa de 10^5 MeV encerrada en una caja unidimensional de longitud 0.01 MeV $^{-1}$.

Para encontrar los valores propios w seguimos el procedimiento ya descrito, en este caso analizamos el punto $x=0.5$, lo cual significa que solo veremos las frecuencias corres-

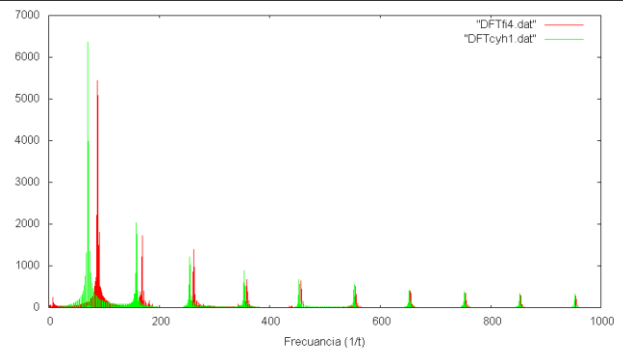


Fig.2 Comparación entre el espectro de energías de las ecuaciones 5 (líneas verdes) y 6 (líneas rojas).

pondientes a los modos normales con n_s 1,3,5,7...etc. Estos resultados se muestran a continuación:

Es importante anotar que aunque para frecuencias bajas los espectros difieren en más de un 20%, a medida que la frecuencia crece, vemos que las frecuencias de oscilación para las dos ecuaciones mostradas en la fig 2, se comienzan a acercar más y más. Lo cual quiere decir que el término adicional $m^2 \psi^3$ deja de jugar un papel importante para altas energías.

Conclusiones

Los valores propios (espectro de frecuencia), de la ecuación de Klein Gordon lineal y con interacción $\lambda \psi^3$ tienden a igualarse a medida que estos aumentan. Mientras que si los términos que acompañan a ψ^3 y a ψ son menores o iguales al valor numérico del término que acompaña a ∇^2 , entonces, no se podrán distinguir los valores propios de la ecuación de onda clásica.

Referencias

- [1] R. Courant, K Friedrichs, H. Lewi, On the Partial Difference Equations of Mathematical Physics, *Mathematische Annalen* 100, 32-74, 1928
- [2] Sirendaoreji, Exact travelling wave solutions for four forms of nonlinear Klein-Gordon equations, *Physics Letters A* 363 (2007) 440-447
- [3] J. L. Synge, A Klein-Gordon Model Particle, *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*, Vol. 283, No. 1392. (Jan. 5, 1965), pp. 14-17
- [4] E. Y. Deeba, S. A. Khuri, A Decomposition Method for Solving the Nonlinear Klein-Gordon Equation, *Journal Of Computational Physics* 124, 442-448 (1996)