



## Creación de Vórtices Estacionarios

Robert P. Salazar<sup>1</sup>, Diego Jaramillo<sup>1</sup>, Camilo Jiménez<sup>1</sup>, C.E.Jácome<sup>1</sup>, J.C.Giraldo<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Grupo de Física Teórica y Desarrollo de Software, Universidad Distrital Francisco José de Caldas, Bogotá D.C-Colombia

Recibido 23 de Oct. 2007; Aceptado 6 de Mar. 2009; Publicado en línea 30 de Abr. 2009

### Resumen

Un aspecto importante en la dinámica de flujos es el estudio de las condiciones que permiten la formación de vórtices, y su permanencia. A lo largo de este trabajo se expone detalladamente la forma de generar vórtices bidimensionales estacionarios en un gas sujeto a varias restricciones mediante el uso de sumideros de calor. Por último, se analiza el comportamiento lineal del sistema y son determinadas soluciones analíticas del campo de velocidades; mostrando que, además de la viscosidad del fluido, el tamaño del vórtice también es un factor determinante en la evolución del sistema hacia el estado estacionario.

**Palabras claves:** Vórtices estacionarios, vorticidad.

### Abstract

A relevant aspect of fluid dynamics is the generation conditions to yield vortices, This paper exposes a way to yield two-dimensional steady vortices into a gas subjected to several restrictions using heat sinks. The lineal behaviour of system is analyzed, and analytic solution for velocity field is found, additionally the effect of viscosity and the size of vortex are identified like important factors in the evolution toward the steady state of system.

**Key Words:** Steady vortex, vorticity.

©2009 Revista Colombiana de física. Todos los derechos reservados.

### 1. Introducción

Es posible crear un vórtice en un gas situado en un marco de referencia que gira mediante la inclusión de un centro de presión, empero esta situación no se mantiene si se permite que las variables termodinámicas se homogenicen en el interior del vórtice por los efectos difusivos de la viscosidad y la conductividad térmica [1], para evitar este fenómeno se puede establecer en el interior del fluido un sumidero de calor que asegure la permanencia de los gradientes de temperatura y de paso la existencia del centro de presión.

### 2. Ecuaciones de movimiento

La temperatura  $T$  de acuerdo a la ecuación lineal de calor (1), alcanzaría un estado estacionario que depende de la naturaleza del sumidero de calor  $h$  en el interior del fluido:

$$\frac{\partial T}{\partial t} - k \nabla^2 T - h = 0 \quad (1) \quad \text{Con:}$$

$$h(\vec{r}) = \begin{cases} \text{Sumidero de calor si } h < 0 \\ \text{Fuente de calor si } h > 0 \end{cases}$$

Ya en el estado estacionario las fuerzas de presión  $\vec{f}^{(s)}(\vec{r}) = -\vec{\nabla} P^{(s)} / \rho_R$  se pueden relacionar con los gradientes de temperatura de la siguiente forma  $\vec{f}(\vec{r}) = -3c_v \vec{\nabla} T^{(s)}$

Donde  $P$  es la presión  $\rho_R$  es la densidad de referencia [1],  $c_v$  el calor específico a volumen constante, esto en combinación con la ecuación de calor en el estado estacionario permite relacionar los centros de presión con el sumidero de calor (2):

$$h = (k / 3c_v) \vec{\nabla} \cdot \vec{f}^{(s)} \quad (2)$$

Al introducir la fuente de calor al sistema y preparar la temperatura inicial de tal forma que coincida con la temperatura estacionaria entonces ésta permanecería invariable

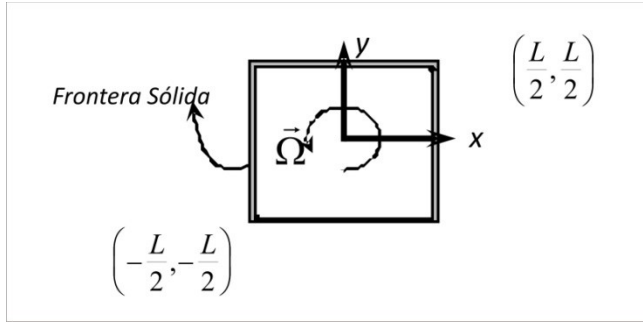


Fig. 1 Sistema

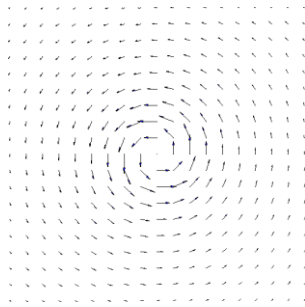


Fig. 2 Vórtice irrotacional

desde el principio, al igual que las fuerzas de presión, esto solamente bajo las suposiciones de que el flujo tiene baja velocidad y satisface la aproximación de Boussinesq [2], la velocidad bajo dichas suposiciones satisface:

$$\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} = \vec{f}^{(s)} + \mathcal{G} \nabla^2 \vec{v} + 2\vec{\Omega} \times \vec{v} \quad (3)$$

La estructura del sistema donde se generará el vórtice será la misma que la descrita en [1], sólo que ahora se mantendrá un sumidero de calor en su interior para generar el centro de presión y se impondrá una frontera sólida (fig. 1)

### 3. Campo de velocidades del vórtice

La velocidad en la frontera sólida debe ser nula dado que el fluido es viscoso. La solución de la ecuación (3) se puede obtener analíticamente, y es:

$$\vec{v}(\vec{r}, t) = \vec{v}^{(s)} + \mathbf{R} \sum_{m=1, n=1}^{\infty} (\vec{v}_o - \vec{v}^{(s)})_{mn} \exp[-\xi \pi^2 (m^2 + n^2)] \varphi_{mn} \quad (4)$$

Donde  $\varphi_{mn}(\vec{r}) = \sin[m\pi(x/L + 1/2)] \sin[n\pi(y/L + 1/2)]$  son las funciones de la base armónica con  $\xi = \mathcal{G}t/L^2$ , la velocidad inicial y estacionaria son respectivamente  $\vec{v}_o(\vec{r})$  y  $\vec{v}^{(s)}(\vec{r})$ .  $\mathbf{R}$

es una matriz de rotación.

$$\mathbf{R} = \begin{pmatrix} \cos(2\Omega t) & \sin(2\Omega t) \\ -\sin(2\Omega t) & \cos(2\Omega t) \end{pmatrix}$$

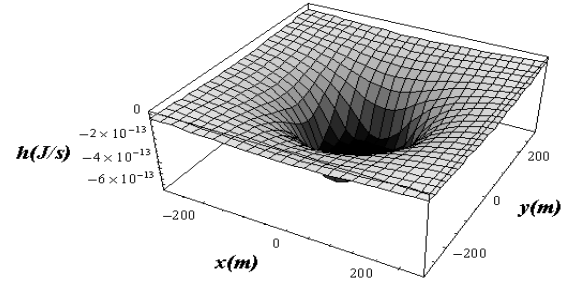


Fig. 3 Sumidero de calor

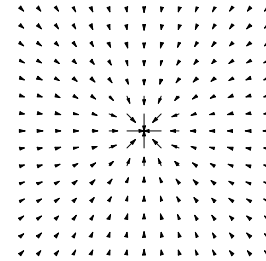


Fig. 4 Fuerzas de presión

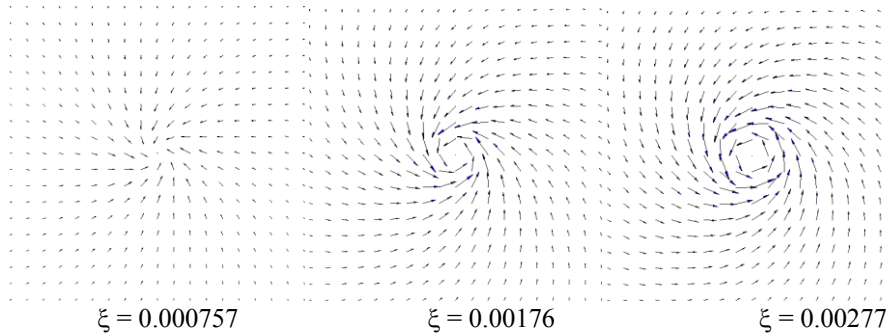
Mientras  $(\vec{v}_o - \vec{v}^{(s)})_{mn}$  son las componentes de  $(\vec{v}_o - \vec{v}^{(s)})$  en la base armónica:

$$(\vec{v}_o - \vec{v}^{(s)})_{mn} = \frac{4}{L^2} \int_{-L/2}^{L/2} \int_{-L/2}^{L/2} (\vec{v}_o - \vec{v}^{(s)}) \varphi_{mn} dx dy$$

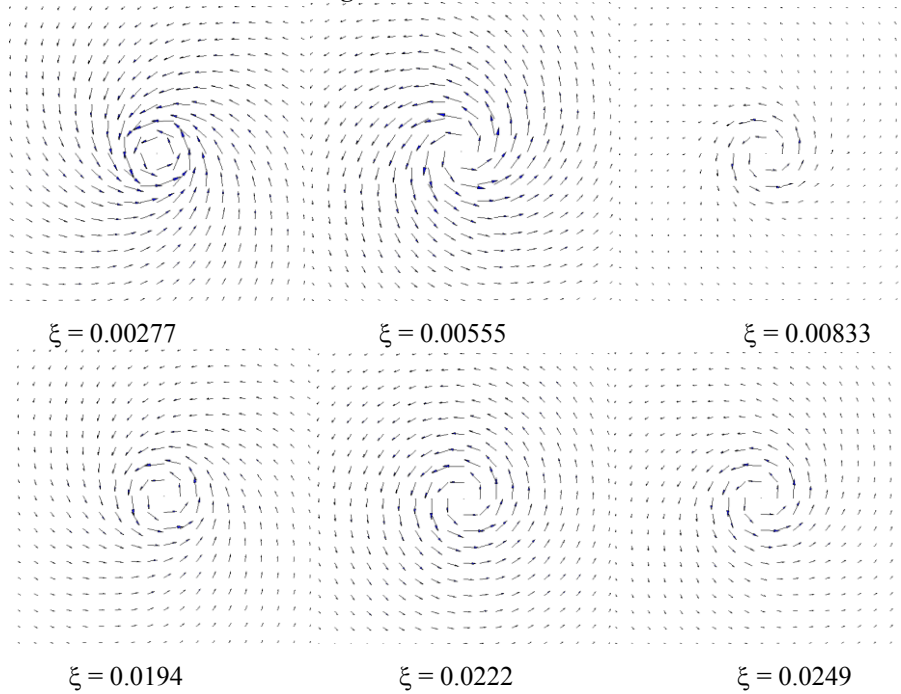
En principio dado el sumidero de calor para usar (4) sería necesario determinar la velocidad estacionaria del vórtice, que implicaría solucionar (3) bajo la condición  $\partial \vec{v} / \partial t = 0$ , pero no sin antes hallar los gradientes de presión solucionando (2), en vez de eso aquí se propone el estado estacionario del vórtice, y mediante el se determinarán las fuerzas de presión y el sumidero de calor que las genera. Para el campo de velocidades de un vórtice irrotacional (fig. 2), se requiere un sumidero de calor que varía con el inverso del cuadrado de la distancia a su centro (un sumidero infinitamente profundo fig. 3), y se genera una distribución radial de las fuerzas de presión (típico de un centro de presión Fig. 4).

El campo de velocidades pasa por dos etapas, una de formación del vórtice y exhibe un comportamiento similar al vórtice lineal sin sumideros de calor [3]:

Después de formado el vórtice sigue otra etapa donde evoluciona al estado transitorio. No estando el vórtice en su primera etapa, como vórtice irrotacional, éste no está en su estado estacionario; así, sigue cambiando, exhibiendo oscilaciones, que son más tenues a medida que pasa el tiempo, donde las oscilaciones periódicas se tornan cada vez más sutiles hasta que desaparecen. En el vórtice la fuerza de Coriolis se manifiesta como una inclusión armónica en el



**Fig. 5** Creación del vórtice



**Fig. 6** Decaimiento del estado transitorio

campo de velocidades, e introduce las oscilaciones; finalmente, en el estado estacionario aquella parte amortiguada de la solución ha decaído totalmente.

**Conclusiones**

Se puede afirmar que un vórtice tratado es similar a una masa atada a un resorte inmersa en un medio viscoso, si bien un vórtice no tiene muelles la fuerza de Coriolis actúa de manera análoga, haciendo oscilar el campo de velocidades de manera armónica, la viscosidad en ambos sistemas juega el mismo papel desvaneciendo el estado transitorio del sistema para llegar en uno al estado estacionario y en el otro a la posición de equilibrio. Empero, debido a que la constante de amortiguamiento del vórtice es  $\mathcal{G}/L^2$ , entonces el tamaño de éste es determinante para el decaimiento de su evolución transitoria. Así las cosas, los vórtices de mayor

tamaño requieren más tiempo para alcanzar el estado estacionario.

**Referencias**

- [1] K.Kundu & M. Cohen, *Fluid Mechanics*, 2<sup>nd</sup> Edition, Academic Press, (2002)
- [2] Robert S. Brodkey, *The Phenomena Of Fluid Motions*, Brodkey Pub., (2004)
- [3] C. Kittel, *Física Térmica*, Editorial Reverté, (1973)