Revista Colombiana de Física,Vol. 41, No.2, Abril 2009

Minimización del Periodo de un Péndulo Físico por Métodos Variacionales

Mayckol J. Morales [a], Rodolfo A. Diaz [a] William J. Herrera [a]

[a] Dep.Física. U. Nacional de Colombia. Bogotá

Recibido 23 de Oct. 2007; Aceptado 6 de Mar. 2009; Publicado en línea 30 de Abr. 2009

Resumen

A partir de una expresión funcional para el momento de inercia de un sólido de revolución, analizamos el periodo de un péndulo compuesto formado con dicho sólido. Usando técnicas variacionales encontramos el perfil del sólido que minimiza el periodo de oscilación de dicho péndulo, tomando como caso específico una campana cuyo perfil se simula por un cono. Este tipo de técnicas pueden ser utilizadas en cursos intermedios en carreras de Física e ingeniería.

Palabras Clave**:** Péndulo físico, momento de inercia, sólidos de revolución.

Abstract

From a functional expression for the moment of inertia of a solid of revolution, we analyze the period of a physical pendulum which is a solid of revolution. By using variational techniques we find the profile of the solid that minimizes the period of oscillation of such a pendulum, taking as a specific case the one of a bell simulated by a cone. These kind of techniques can be utilized in intermediate courses for Physicists and Engineers.

Keywords**:** Physical pendulum, moment of inertia, solids of revolution.

1. Introducción

La formulación dada en [1] para el cálculo de los momentos de inercia de sólidos de revolución, simplifica los cálculos explícitos al tiempo que permite el uso de técnicas variacionales que la literatura no aplica para la optimización del momento de inercia. En este trabajo se estudia el comportamiento del periodo de oscilación de una campana simulada por un cono, encontrando cual es el valor de la altura que para un volumen dado minimiza este período, para ello aplicaremos la técnica de variación de parámetros y el método tradicional basado en el cálculo ordinario.

2. Formulas básicas

Si tenemos una función $f(x) \geq 0$ en un intervalo $[x_0, x_f]$ podemos generar un sólido de revolución girando alrededor del eje X usando a $f(x)$ como función generadora. Para dicho sólido, la posición de su centro de masa y su masa se pueden escribir en términos de la función generadora [2]:

$$x_{CM} = \frac{\int_{x_0}^{x_f} x f(x)^2 \, dx}{\int_{x_0}^{x_f} f(x)^2 \, dx} \quad M = \pi\rho \int_{x_0}^{x_f} f(x)^2 \, dx \tag{1}$$

Siendo ρ la densidad del sólido, el cual suponemos homogéneo. El momento de inercia para su eje de simetría (eje x) y para un eje perpendicular al eje de simetría

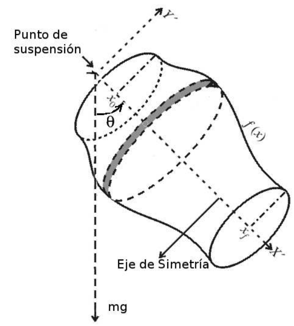

Figura 1. *Péndulo físico formado por un sólido de revolución.*

(eje y) están dados por [1]:

$$I_X = \frac{\pi\rho}{2}\int_{x_0}^{x_f} f\left(x\right)^4 dx \ \ ; \ \ I_Y = \frac{I_X}{2} + \pi\rho\int_{x_0}^{x_f} x^2 f\left(x\right)^2 dx \qquad (2)$$

De la literatura sabemos que el periodo de un péndulo físico está dado por:[5]

$$T = T_0\int_0^{\theta_0}\left(\frac{d\phi}{\sqrt{k^2-\sin^2\left(\frac{\phi}{2}\right)}}\right) \ \ ; \ \ T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{I}{Mgd_{CM}}} \qquad (3)$$

donde I es el momento de inercia respecto al eje de giro, M la masa total, d_{CM} la distancia al centro de masa del péndulo físico y $k = \sin\frac{\theta_0}{2}$. Para la integral (3), usaremos la expansión[5],[4]:

$$T(\theta_0) = T_0\left(1 + \frac{k^2}{2^2} + \frac{3^2k^4}{2^6} + \frac{5^2k^6}{2^8} + \frac{35^2k^8}{2^{14}} + \cdots\right)$$

vale decir que la expansión aquí presentada se utilizará en aras de presentar datos más realistas del periodo, pero no afectará la solución al problema de los parámetros que minimizan al periodo.

3. Formulación del problema

Sea un sólido de revolución que oscila alrededor de un eje perpendicular a su eje de simetría con amplitud arbitraria, es decir que la integral de la ecuación (3), toma un valor determinado que llamaremos A. Entonces, reemplazando las relaciones anteriores en la ecuación (3), obtenemos que el periodo de un sólido de revolución generado alrededor del eje x cuando oscila respecto al eje y está dado por:

$$T_y\left[f\right] = 2\pi A\sqrt{\frac{\frac{1}{4}\int_{x_0}^{x_f} f\left(x\right)^4 dx + \int_{x_0}^{x_f} x^2 f\left(x\right)^2 dx}{g\int_{x_0}^{x_f} x f\left(x\right)^2 dx}} \qquad (4)$$

En (4) se observa que el periodo no depende de la masa. El aspecto más importante de la expresión (4) es que muestra el periodo del péndulo Físico como un funcional de la función que lo genera, lo cual permite el uso de técnicas variacionales para minimizar esta cantidad. Como ejemplo tomemos el perfil de un cono, y estudiaremos su periodo cuando el cono es pivoteado por su base o por la punta (el último corresponde a la situación más realista en el caso de una campana). Como función perfil para el cono pivoteado por la base y por la punta se usan respectivamente las funciones

$$f_1(x) = -\frac{R}{h}x + R \ \ ; \ \ f_2(x) = \frac{R}{h}x \qquad (5)$$

con $x_0 = 0$ y $x_f = h$. La idea es encontrar los valores de R y h que conducen a una minimización del periodo para cada cono manteniendo fijo el volumen con densidad constante. Desde el punto de vista funcional, esto implica mantener la masa como ligadura constante. El funcional a minimizar será de la forma

$$G\left[f\left(R,h\right)\right] = \frac{T_y\left[f\left(R,h\right)\right]}{M\left[f\left(R,h\right)\right]}$$

con T_y y M dados por las Ecs. (4, 1) y las funciones de R y h están dadas por (5). Se puede entonces usar variación de los parámetros R y h igualando sus derivadas parciales a cero a fin de encontrar los valores que minimizan el periodo. No obstante, este problema particular se puede resolver por métodos algebráicos. Por ejemplo, el periodo de oscilación para cada cono se puede encontrar algebráicamente usando (4, 5) y se obtiene la expresión:

$$\begin{aligned} T_{cono\,(a)} &= 2\pi A\sqrt{\frac{h}{5g}\left(4 + \frac{R^2}{h^2}\right)} \\ T_{cono\,(b)} &= 2\pi A\sqrt{\frac{h}{5g}\left(2 + \frac{3R^2}{h^2}\right)} \end{aligned} \qquad (6)$$

Para el cono (a) pivoteado por la base y el cono (b) pivoteado por la punta. Es fácil ver que cuando R y h son iguales el periodo de los péndulos es el mismo e igual al de un péndulo simple de longitud h.

Para hallar los valores de h y R que minimizan el periodo de cada cono manteniendo constante el volumen, reescribimos los periodos anteriores en función del volumen $V_0 = \frac{\pi R^2 h}{3}$ y de h:

$$\begin{aligned} T_{cono\ (a)} &= 2\pi A \sqrt{\frac{h}{5g}\left(4 + \frac{3V_0}{\pi h^3}\right)} \\ T_{cono\,(b)} &= 2\pi A \sqrt{\frac{h}{5g}\left(2 + \frac{9V_0}{\pi h^3}\right)} \end{aligned} \tag{7}$$

Empleando cálculo diferencial encontramos los valores de h que minimizan estos periodos

$$h_{cono\ (a)} = \sqrt[3]{\frac{3}{2\pi}V_0} \quad h_{cono\ (b)} = \sqrt[3]{\frac{9}{\pi}V_0}$$

Es de notar que este mínimo es independiente de la amplitud inicial del péndulo. Los valores de h correspondientes a $V_0 = 1\ cm^3$son: $h_{cono\ (a)} = 1{,}42\ cm$, y $h_{cono\ (b)} = 0{,}78\ cm$. El lector puede verificar que los valores de h para el mínimo del periodo coinciden con los que se obtienen por variación de parámetros.

Aunque en este caso los métodos variacionales no son especialmente ventajosos para minimizar el periodo, el problema nos permite acercarnos de manera más pedagógica a estos métodos para variables relacionadas con el momento de inercia y contrastar sus resultados con los obtenidos por cálculo ordinario. Se propone al lector el siguiente problema una vez se familiarice con el anterior: Encontrar la función $f(x)$ que minimice el periodo de un péndulo físico que rota respecto al eje perpendicular al eje de simetría, manteniendo constante la masa y la densidad así como el intervalo que define a $f(x)$. En este problema, $f(x)$ es arbitraria y la ligadura es una ligadura integral que no se puede despejar a priori, en este caso los métodos variacionales adquieren especial interés y se puede tratar la ligadura via multiplicadores de Lagrange [1],[3].

Conclusiones

Hemos ilustrado la manera de utilizar los métodos variacionales para efectos de encontrar el periodo de oscilación de un péndulo físico, dando a este péndulo un perfil en el que dejamos algunos parámetros a ajustar manteniendo la ligadura de volumen constante. Esta situación se puede constrastar con la solución que se obtiene usando cálculo ordinario lo cual le da un carácter más pedagógico para una primera aproximación al problema. Se propone al lector la solución del mismo problema pero con función perfil arbitraria el cual no tiene solución sencilla utilizando el cálculo ordinario, esto con el fin de ilustrar el verdadero poder del método variacional. Se pudo ver que el período de oscilación de un sólido de revolución cuando oscila alrededor de un eje perpendicular a su eje de simetría es independiente de la masa. En particular, se trabajó la minimización de una campana simulada por un cono, y se estudiaron los casos en los cuales el cono se suspende por la base y cuando se suspende por la punta. Se tomó la ligadura de volumen constante para los conos y a su radio y altura R y h como parámetros de variación. Se observó que el periodo mínimo del cono sostenido por la punta es menor que el del cono sostenido por la base. El valor de h que minimiza el periodo de oscilación es el mismo para cualquier valor de la amplitud de oscilación.

Vale decir que estos problemas no son solo de interés pedagógico, pues la optimización de funcionales pueden ser de utilidad en Ingeniería y Física aplicada.

Los autores agradecen a la DIB por el soporte financiero.

Referencias

[1] Rodolfo A. Diaz, William J. Herrera and R. Martinez *Moments of inertia for solids of revolution and variational methods,* European Journal of Physics. **27** (2006) 183-192.

[2] Louis Leithold *El cálculo con geometría analítica,* segunda edición (1973). Harla Harper&Row Latinoamericana (edición en español).

[3] Arfken G *Mathematical Methods for Phycists* Segunda edición (New York Academic Press) Capítulo 17, 1970.

[4] D. Kleppner, R. Kolenkow, *An introduction to mechanics,* McGRAW-HILL KOGAKUSHA LTD, 1973

[5] http://www.fisicarecreativa.com/guias/pendulo2.pdf