



Ejemplos de uso del Método de las Imágenes para Calcular la Energía Interna de Sistemas Electroestáticos

Carlos A. Gómez^a, Rodolfo A. Diaz^a, William J. Herrera^a

^aDep. de Física. U. Nacional de Colombia, Bogotá.

Recibido 23 de Oct. 2007; Aceptado 6 de Mar. 2009; Publicado en línea 30 de Abr. 2009

Resumen

El método de las imágenes en electrostática se usa para calcular potenciales, fuerzas y campos. Sin embargo no es usual encontrar cálculos de energía interna utilizando este método. En este trabajo calculamos la energía interna de algunos sistemas electrostáticos utilizando el método de las imágenes. La técnica es de fácil aplicación para cursos introductorios de electricidad y magnetismo.

Palabras Clave: Método de imágenes, electrostática, energía interna.

Abstract

The method of images is used in electrostatics to calculate potentials, forces and fields. However, such a method is not used in the literature for the calculation of the internal energy. In this paper we calculate the internal energy of some electrostatic systems by employing the method of images. The technique is suitable for introductory courses of electricity and magnetism.

Keywords: Method of images, electrostatics, internal energy.

©2009. Revista Colombiana de Física. Todos los derechos reservados.

1. Introducción

El método de las imágenes (MI) no permite calcular directamente la energía interna electrostática, ya que esta cantidad requiere del cálculo de una integral de volumen del campo eléctrico al cuadrado en todo el espacio, en tanto que el MI solo permite calcular el campo eléctrico en la región de Dirichlet [2]. No obstante, un método sistemático para el cálculo de la energía interna electrostática por medio del MI ha sido recientemente desarrollado [1]. En este artículo se aplicará la metodología desarrollada en [1] para algunos sistemas electrostáticos.

2. Manejo de Gráficos

Nuestro sistema electrostático constará de un conductor en presencia de una cierta distribución de cargas $\{q_j\}$, y lo denotamos como sistema A . Para muchos propósitos este sistema se puede reemplazar por un sistema B correspondiente a la misma distribución de cargas $\{q_i\}$ pero reemplazando al conductor por una distribución de cargas imagen $\{\bar{q}_j\}$. La idea es escribir la energía interna del sistema real A de modo que dependa exclusivamente de propiedades del sistema virtual B . Cuando el conductor está conectado a tierra, el resultado es [1]

$$U_{int}^{(A)} = \frac{1}{2} \sum_{j=1}^M \sum_{k=1}^N \frac{K_c \bar{q}_k q_j}{|\bar{\mathbf{r}}_r - \mathbf{r}_j|} \quad (1)$$

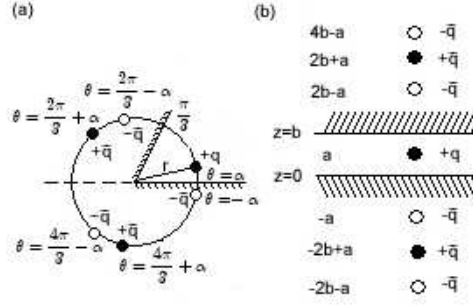


Figura 1. (a) Dos planos semi-infinitos forman un ángulo diedro, (b) dos planos infinitos paralelos. En ambos casos hay una carga puntual interior y se especifican las imágenes.

q_j , \mathbf{r}_j son las cargas y posiciones de la distribución de carga exterior al conductor y \bar{q}_k , $\bar{\mathbf{r}}_k$ son las cargas y posiciones de las cargas imagen. Finalmente, $K_c = (4\pi\epsilon_0)^{-1}$ en el sistema internacional. La Ec. (1) solo utiliza variables del sistema B como son los valores de las cargas y posiciones de la distribución $\{q_j\}$ y de la distribución virtual $\{\bar{q}_k\}$. Veamos algunos ejemplos de aplicación.

Ejemplo 1: Sean dos planos semi-infinitos conectados a tierra y que forman un ángulo $\pi/3$. Entre ellos hay una carga puntual q . El ángulo que forma la carga q con el eje X es $\alpha < \pi/3$ y está a una distancia r del origen, ver Fig. 1(a). La configuración de cargas y posiciones reales y virtuales escrita en coordenadas polares viene dada por [3]:

$$\{q, \mathbf{r}\} \rightarrow \{q, (r, \alpha)\}; \{\bar{q}_k, \bar{\mathbf{r}}_k\} \rightarrow \{(-1)^k q, (r, \bar{\theta}_k)\}$$

$$k = 1, \dots, 5; \bar{\theta}_{1,2} = \frac{2\pi}{3} \mp \alpha, \bar{\theta}_{3,4} = \frac{4\pi}{3} \mp \alpha, \bar{\theta}_5 = -\alpha \quad (2)$$

Reemplazando (2) en (1), la energía interna del sistema A es

$$U_{int}^{(A)} = \frac{K_c q^2}{2\sqrt{2}r} \sum_{k=1}^5 \frac{(-1)^k}{\sqrt{1 - \cos \alpha \cos \bar{\theta}_k - \sin \alpha \sin \bar{\theta}_k}}$$

$$U_{int}^{(A)} = \frac{K_c q^2}{2r} \left[\frac{2}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2 \sin \alpha} - \frac{1}{\sqrt{(\cos 2\alpha - \sqrt{3} \sin 2\alpha + 2)}} \right. \\ \left. - \frac{1}{\sqrt{\cos 2\alpha + \sqrt{3} \sin 2\alpha + 2}} \right] \quad (3)$$

$$U_{int}^{(A)} \equiv \frac{K_c q^2}{2r} F(\alpha) \quad (4)$$

la Ec. (3) solo es válida para $0 < \alpha < \pi/3$. La función $F(\alpha)$ definida en (4), permite explorar el comportamiento de la energía interna, una gráfica de $F(\alpha)$ en el intervalo $0 < \alpha < \pi/3$ muestra que esta función es simétrica alrededor de $\alpha = \pi/6$ como se espera de la simetría de la configuración, la función es siempre negativa y cóncava hacia abajo, alcanzando su máximo lo-

cal en $\alpha = \pi/6$ y tendiendo a $-\infty$ cuando $\alpha \rightarrow 0, \pi/3$. El máximo valor de $F(\alpha)$ es $F(\pi/6) = -1,345$. Por otro lado, la energía interna decrece a medida que q se aleja del origen como se vé en (4) y tiende a $-\infty$ cuando $r \rightarrow 0$.

Ejemplo 2: Sea un par de placas paralelas infinitas conectadas a tierra ubicadas en $z = 0$ y $z = b$, una carga puntual q se ubica en $z = a$ con $0 < a < b$. Como se vé en la Fig. 1(b), hay cargas imagen positivas $+q$ en $z = 2nb + a$ y negativas $-q$ en $z = 2nb - a$ donde el entero n va desde $-\infty$ hasta ∞ [3]. Es más cómodo dividir el conjunto de cargas imagen en el conjunto de imágenes ubicadas en $z > b$ y el conjunto de imágenes ubicadas en $z < 0$, con lo cual la energía interna se escribe

$$U_{int}^{(A)} = \frac{1}{2} \sum_{n=-\infty}^0 \frac{K_c \bar{q}_n q}{|\bar{z}_n - a|} + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K_c \bar{q}_n q}{|\bar{z}_n - a|}$$

La primera serie (para imágenes en $z < 0$) se puede redefinir como una suma desde cero hasta infinito empezando a contar desde la carga más cercana a la carga real. Estas series se pueden escribir en forma sintética para obtener

$$U_{int}^{(A)} = \frac{K_c q^2}{4} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n - [n/2])b + a \cos^2(\frac{n\pi}{2})} \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n - [n/2])b - a \sin^2(\frac{n\pi}{2})} \right\} \quad (5)$$

donde $[n/2]$ define la función parte entera de $n/2$. Cada una de estas integrales cumple las desigualdades

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n - [n/2])b + a \cos^2(\frac{n\pi}{2})} \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{(n - [n/2])b}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n - [n/2])b - a \sin^2(\frac{n\pi}{2})} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(n - [n/2])b - a}$$

Las series a la derecha son de la forma $\sum (-1)^n a_n$ con $a_n > 0$, y a_n es monótonamente decreciente con $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$, de modo que convergen por criterio de Leibnitz, y por comparación, también convergen las series de nuestro interés (en las series a la izquierda, las a_n no decrecen monótonamente de modo que el criterio de Leibnitz no se puede aplicar directamente). No obstante, estas series convergen condicionalmente, y es bien conocido que estas series no pueden ser en general reagrupadas, también deben tratarse con cuidado cuando pertenecen a una serie doble ya que en general no se pueden intercambiar las sumatorias [4]. Desde el punto de vista numérico se requiere de bastantes términos para lograr una convergencia aceptable, usando las sumas parciales en el orden establecido por las sumatorias.

Conclusiones

Hemos ilustrado a través de configuraciones específicas, la manera de calcular la energía interna elec-

trostática utilizando el método de las imágenes. Desde el punto de vista pedagógico, esto permite profundizar en el método de las imágenes aplicándolo en escenarios que no se han considerado en la literatura, y que son de fácil comprensión para estudiantes de cursos introductorios de electricidad y magnetismo. Desde el punto de vista práctico los cálculos son mucho más sencillos y directos, el lector puede convencerse de este hecho calculando la energía interna de las configuraciones aquí descritas con los métodos tradicionales.

Referencias

- [1] Rodolfo A. Diaz, William J. Herrera, J. Virgilio Niño, European Journal of Physics Vol. 27 (2006) 1391-1398.
- [2] D. Griffiths "Introduction to Electrodynamics" 3rd Ed. (Englewood Cliffs, NJ:Prentice Hall) (1999) section 3.2.3
- [3] R. Terras, R. Swanson, Am. J. Phys. V. 48, # 7, p. 526 (1980). W. A. Newcomb, Am. J. Phys. V. 50, # 7, p. 601 (1982).
- [4] G.B. Arfken, H.J. Weber "Mathematical methods for physicists" 6th Ed. Elsevier Academic Press (2005). Sec. 5.3