



Movimiento Caótico de una Partícula Cargada en la Cola de la Magnetosfera Terrestre

P. Pinilla

Dpto. Física, Universidad de Los Andes, AA4976, Bogotá D.C

Recibido 22 de Oct. 2007; Aceptado 15 de Oct. 2008; Publicado en línea 5 de Ene. 2009

Resumen

Debido al movimiento libre de los iones dentro del plasma de la cola de la magnetosfera, se generan corrientes que a su vez producen campos magnéticos; el equilibrio de Harris es una solución para el campo magnético producido por estas cargas en movimiento. Al estudiar el comportamiento de partículas cargadas dentro de esta solución, resulta que el sistema es integrable y las trayectorias seguidas por estas partículas son periódicas y predecibles. Al agregar pequeñas perturbaciones al equilibrio de Harris, el carácter integrable del sistema se pierde y se convierte en un interesante ejemplo de sistemas caóticos conservativos. La perturbación que se estudia en este artículo es la suma de un campo oblicuo en la misma dirección del campo dipolar terrestre, término que genera el rompimiento de los toroides de las correspondientes secciones de Poincaré, este rompimiento a su vez tendrá una dependencia con el parámetro de perturbación y la energía total del sistema. En la transición a las regiones completamente caóticas se estudia la aparición de islas de estabilidad y superficies KAM

Palabras claves: Equilibrio de Harris, Caos conservativo, secciones de Poincaré, teorema KAM.

Abstract

When the ions move freely inside the plasma of the magnetotail, they generate currents which create magnetic fields; Harris sheet is a solution for the magnetic field that these ions produce when they are moving. When studying the behavior of charged particles for this solution, the result is integrable and the particle trajectories are periodic and predictable. When adding small perturbations to the Harris sheet, the system are now not integrable and it turns out to be into an interesting example of conservative chaotic systems. The perturbation that is considered in this article is the addition of an oblique field in the same direction as the dipolar magnetic field of the Earth; this new term produces the breaking of the toroids of the Poincaré sections and this breaking will depend of a perturbative parameter and of the total energy of the system. Over the transition from the integrable systems to completely chaotic systems is interesting to study the stability islands and KAM-surfaces.

Keywords: Harris sheet, Conservative chaos, Poincaré sections, KAM-theorem.

© 2009 Revista Colombiana de Física. Todos los derechos reservados.

1. Introducción

El campo magnético dipolar de la tierra se encuentra expuesto a una gran cantidad de partículas cargadas provenientes del Sol, debido a este contacto continuo de esta región del espacio conocida como magnetosfera con rayos X, luz ultravioleta, etc.; las temperaturas que se alcanzan

dentro de esta son muy altas, haciendo que se comporte como plasma. Entendiendo la cola de la magnetosfera como plasma y al estudiar el movimiento de una partícula cargada dentro de esta, se debe entonces analizar las trayectorias que puede seguir una partícula dentro de campos electromagnéticos. Estas trayectorias pueden llegar a ser complicadas debido a que estas dependen de los campos electromagnéti-

cos a los que estén expuestas las partículas y por una parte se encuentran los campos intrínsecos del plasma generados por las corrientes que se generan por el continuo movimiento de los electrones y protones dentro del mismo, una solución integrable para este campo es el equilibrio de Harris; y por el otro lado está el campo magnético de la tierra (campo dipolar) que también afecta el movimiento de las partículas.

$$\vec{B} = B_0 \text{Tanh}\left(\frac{z}{\delta}\right) \hat{x} \quad (1)$$

El equilibrio de Harris (1) es solución para las ecuaciones de Vlasov-Maxwell donde el comportamiento de una partícula cargada es periódico, con B_0 del orden de 10^9 T y δ un parámetro pequeño que puede variar según sea necesario; este campo magnético se puede aplicar entonces para una visión no-dinámica de una partícula cargada en la cola de la magnetosfera, el cual es generado colectivamente por el plasma del que está compuesto esta parte de la magnetosfera.

Como los campos magnéticos no realizan trabajo sobre las partículas y por lo tanto no modifican la energía mecánica del sistema, estos son casos donde puede aparecer caos conservativo. Las trayectorias que se pueden obtener en un sistema conservativo en el espacio de fases conforman topológicamente un toroide cuyo volumen es constante. Una de las razones por las cuales esto sucede es porque debido a la falta de fuerzas no conservativas los puntos de la trayectoria se van a encontrar entonces a una distancia promedio finita de la órbita periódica de estabilidad formando un toroide, el cual va a ser una superficie invariante. Las secciones de Poincaré serán entonces intersecciones de este toroide con un plano imaginario Fig.1. La supervivencia de estos toroides bajo una perturbación dependerá de su carácter racional o irracional, entre más irracional sea el toroide es más difícil su deformación y finalmente su destrucción (teorema KAM)

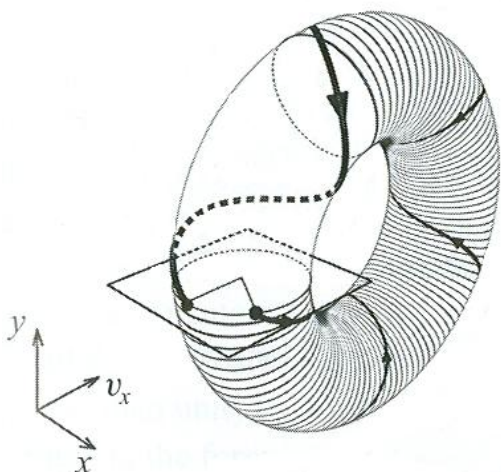


Fig.1 Trayectorias de sistemas conservativos formando un toroide. Secciones de Poincaré

2. Resultados y discusión

En el estudio del movimiento de una partícula cargada en el equilibrio de Harris, el potencial efectivo al que se encuentra sometida la partícula se reduce a una dimensión y su naturaleza dependerá de un momento conjugado constante p_y . Dependiendo del valor que se le quiera dar a p_y el potencial efectivo tendrá un único punto de estabilidad o podrá ser biestable. Sin embargo, sin importar cual sea el caso, la trayectoria de la partícula será periódica y predecible Fig.2. Al considerar como perturbación un campo magnético oblicuo en la misma dirección del campo dipolar magnético terrestre, el campo total es (2). La trayectoria que sigue una partícula cargada dentro de este campo magnético va a depender de un parámetro perturbativo η , el cual va a tener un valor mayor entre más considerable se haga la perturbación con respecto a la solución de equilibrio; estas trayectorias serán irregulares y no presentarán periodicidad Fig.3.

$$\vec{B} = B_0 \text{Tanh}\left(\frac{z}{\delta}\right) \hat{x} - B' x \hat{z} \quad (2)$$

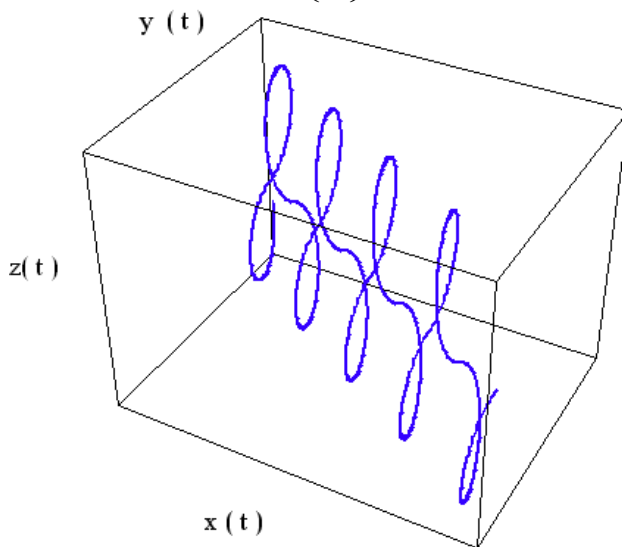


Fig.2 Trayectoria de una partícula cargada dentro de un campo magnético de Harris.

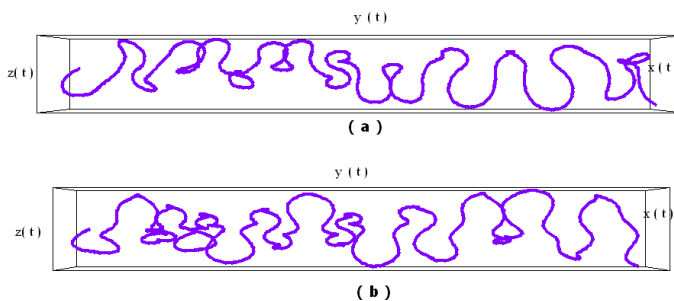


Fig.3 Vista lateral de la trayectoria de una partícula cargada dentro de un campo magnético dado por (2). (a) Con $\eta=0.1$ (b) Con $\eta=0.3$

El espacio de fases para este caso está determinado por las variables x , p_x , z y p_z y como la energía total del sistema se conserva, entonces una de estas variables se puede determinar en términos de las otras, se tiene entonces un espacio de fases tridimensional que forma una superficie toroidal. Para la obtención de las secciones de Poincaré se hace una intersección con un plano imaginario, de tal forma que se tiene entonces secciones bidimensionales. Las Fig.4. y Fig.5. muestran el tipo de secciones de Poincaré que se pueden obtener bajo ciertas circunstancias; en las cuales se pueden notar la deformación de toroides irracionales y la aparición de posibles islas de estabilidad respectivamente bajo ciertos parámetros.

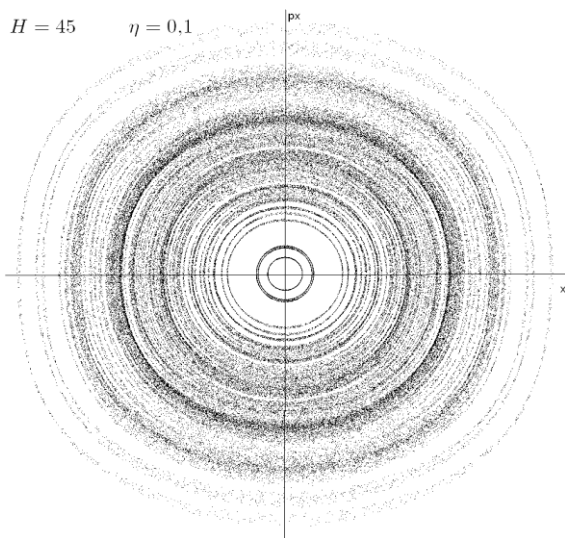


Fig.4 Deformación de toroides irracionales de las secciones de Poincaré con $\eta = 0.1$ y $H = 45$

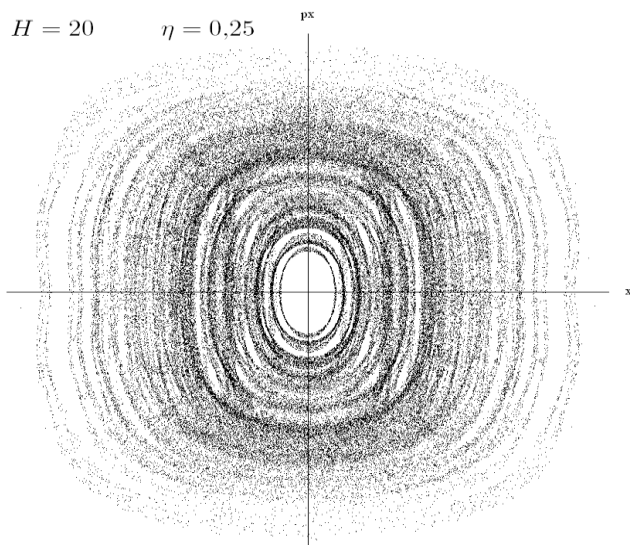


Fig.5 Existencia de islas de estabilidad de las secciones de Poincaré con $\eta = 0.25$ y $H = 20$

3. Discusión y Conclusiones

Al tener en cuenta un campo oblicuo en la misma dirección del campo dipolar terrestre, se observa la pérdida de periodicidad de las trayectorias de las partículas cargadas y el sistema a estudiar ya no es integrable. Las secciones de Poincaré revelan regiones de caos, las cuales se dan gracias a la existencia de puntos hiperbólicos en el potencial efectivo; la destrucción de los toroides irracionales dependerá de dos parámetros: el parámetro perturbativo η y de la energía total del sistema; también dependerá de la irracionalidad inicial del toroide (teorema KAM). Así mismo es posible observar bajo ciertos parámetros la aparición de islas de estabilidad que se deben a los posibles puntos elípticos del mismo potencial efectivo. El cálculo de coeficientes de Lyapunov es un estudio abierto e interesante para la comprensión del caos que se evidencia en este sistema. Otro interrogante abierto es considerar perturbaciones más cercanas al campo dipolar terrestre y cuyo potencial efectivo al que se encuentren sometidas las partículas tenga puntos de estabilidad (hecho que no se da cuando se toma exactamente el campo dipolar como perturbación).

Referencias

- [1] Pinilla P., Movimiento caótico de partículas en la cola de la magnetosfera terrestre, tesis de pregrado Departamento de Física, Universidad de los Andes, Bogotá D.C., Colombia, Mayo de 2007.
- [2] Rappa R. M., Holland D.L., Matsuoka H. y Martin Jr. R. F., Characterization of chaotic particle dynamics in the earth's magnetotail, Physics Department, Illinois State University, Noviembre de 2000.