Revista Colombiana de Física,Vol. 40, No.2, Julio 2008

Modelado de Sistemas Dinámicos a Partir de Datos Experimentales

D. Bravo-Montenegro [a], J. Cortes-Carvajal [a], M. Patiño [a], J.Cabrera-López [b]

[a]*Grupo DSC, Programa de Ingeniería Física, Universidad del Cauca, Popayán, Colombia*
[b]*Grupo de Bionanoelectrónica, Escuela EIEE, Universidad del Valle, Cali, Colombia.*

Recibido 22 de Oct. 2007; Aceptado 16 de Jun. 2008; Publicado en línea 25 de Jul. 2008

Resumen

Es posible obtener un modelo dinámico de un proceso a partir de leyes físicas, esta representación matemática es por lo general, una ecuación diferencial cuyos coeficientes se asumen conocidos. El diseño de experimentos para medir estos coeficientes es dispendioso y requiere de gran experiencia. El modelado a partir de datos experimentales, conocido como *identificación de sistemas*, trata al proceso como una caja negra y con base a la medición de señales entrada-salida encuentra su modelo matemático. La técnica de identificación descrita en este artículo sólo aplica para sistemas lineales e invariantes en el tiempo con representación entrada-salida, cuyo objetivo de modelamiento es el control del mismo. Esta técnica puede ser utilizada para el análisis de sistemas físicos donde no es fácil determinar un modelo analítico que describa su comportamiento.

***Palabras Clave*:** Datos Experimentales, Identificación, Modelos, Señales, Sistemas dinámicos.

Abstract

It is possible to obtain a dynamic model of a process from physical laws, this mathematical representation is generally, an equation differential whose coefficients are assumed well-known. The design of experiments to measure these coefficients is expensive and requires of great experience. The modeled from experimental data, known like *identification systems*, treats to the process as a black box and with base to the measurement of signals input-output finds the model mathematical. The technique of identification described in this article only applies for linear and time invariant systems with representation input-output, whose goal of modeling is the control of the same one. This technique can be used for the analysis of physical systems where it is not easy to determine an analytical model that it describes his behavior.

***Keywords*:** Experimental Data, Identification, Models, Signals, Dynamic Systems.

1. Introducción

En muchos casos en el diseño de sistemas de control es más díficil modelar el sistema dinámico que diseñar el controlador, se puede diseñar un excelente controlador y obtener muy buenos resultados en la simulación por computador, pero si el modelo con el que se trabajando no representa adecuadamente el sistema, los resultados obtenidos no serán satisfactorios. La identificación permite construir representaciones matemáticas de sistemas dinámicos a partir de datos experimentales, tales representaciones pueden ser *no-paramétricas* como la respuesta al impulso y la respuesta en frecuencia, o *paramétricas* como los coeficientes de un modelo matemático (2).

2. Metodos de Identificacíon Paramétrica

La identificación paramétrica parte de la selección de la estructura del modelo que representará el sistema a identificar, los parámetros del modelo se determinan mediante algoritmos conocidos como *Técnicas de Identificación de Parámetros*. Los modelos matemáticos que se utililizarán se componen de una parte determinística y una estocástica, esta última representa los disturbios que afectan el sistema. Aunque los disturbios afectan todas las señales del sistema se supondran concentrados en la salida del mismo.

La siguiente será la estructura a utilizar para la representación del sistema dinámico a identificar.

La parte determinística de la señal de salida $y(k)$ se expresa como la respuesta de $G(q)$, un sistema lineal de tiempo discreto gobernado por una señal deterministica $u(k)$ que representa las entradas al sistema. $v(k)$, la parte estocástica de y(k), representa el ruido que afecta cualquier tipo de medición.

$$y(k) = G(q)u(k) + v(k) \tag{1}$$

Aquí suponemos que la planta es un sistema lineal alrededor del punto de operación donde se obtuvieron los datos para la identificación, también que la señal de ruido que afecto al proceso de medición, se puede representar como la respuesta de estado estacionario de un sistema lineal excitado por una señal de ruido blanco $e(k)$.

$$v(k) = H(q)e(k) \tag{2}$$

En identificación la estimación del modelo se hace a partir de muestras de las señales de entrada y de salida, las funciones de transferencia $G(q)$ y $H(q)$ serán de tiempo discreto. Se debe tener en cuenta que no es fácil ajustar datos muestreados a modelos de tiempo continuo (3), las anteriores consideraciones implican que $H(q)$debe tener todos sus polos y ceros dentro del círculo unitario. El modelo (Ec. 1) puede representarse en términos de polinomios de grado finito como:

$$A(q)y(k) = \frac{B(q)}{F(q)}u(k) + \frac{C(q)}{D(q)}e(k) \tag{3}$$

Los diferentes tipos de estructuras para la representación de sistemas dinámicos *LTI* como: *FIR(Finite Impulse Response), ARX(Auto-Regresive with eXternal input), ARMAX(Autoregresive Moving Average with eXternal input), OE(Output Error), BJ(Box and Jenkins)* son casos especiales de (Ec. 3).

3. Estimación Recursiva de Parámetros

Las técnicas de estimación de parámetros se clasifican en recursivas y no recursivas. Las técnicas no recursivas procesan todos los datos de entrada-salida disponibles y posteriormente entregan un vector con los parámetros del modelo, las técnicas recursivas a medida que van procesando los datos van calculando los parámetros del modelo.
Los metodos recursivos de estimación de parámetros son procedimientos de identificación que continuamente actualizan los parámetros del modelo de un proceso. El siguiente conjunto de pasos representa la estructura general de una algoritmo de identificación recursivo.

1. Leer la entrada del proceso
2. Leer la salida del proceso
3. Calcular la salida predicha por el modelo
4. Calcular el error de predicción, (diferencia entre la salida del proceso y la predicha por el modelo.)
5. Recalcular los parámetros del modelo con base en el error de predicción.
6. Saltar al paso 1

Aunque existen diferentes esquemas de estimación recursiva de parámetros, el método de los mínimos cuadrados es uno de los más empleados, este tiene como objetivo minimizar la suma de los cuadrados de los errores de predicción. En general un sistema dinámico discreto de orden n, con un tiempo de retardo de d instantes de muestreo puede describirse utilizando la siguiente representación:

$$y(k) = \sum_{i=1}^{n} -a_i y(k-i) + \sum_{i=1}^{m} b_i u(k-d-i) + e(k) \tag{4}$$

La determinación de los coeficientes a_i y b_i de la ecuación de diferencias se realizará aplicando un algoritmo recursivo de estimación de parámetros. En el caso concreto del algoritmo de mínimos cuadrados recursivos, la regla de actualización del vector de parámetros busca minimizar la suma de cuadrados de los errores de predicción.

$$J = \sum_{i=1}^{k} \alpha^{k-i} e_p(i)^2 \tag{5}$$

α es un número entre 0 y 1 $(0 < \alpha < 1)$ y se denomina factor de olvido. El índice a minimizar Ec.(5) es una suma ponderada de los cuadrados de los errores de predicción hasta el instante k. La regla de actualización que minimiza a Ec.(5) es:

$$\hat{\theta}(k) = \hat{\theta}(k-1) + G(k)e_p(k) \tag{6}$$

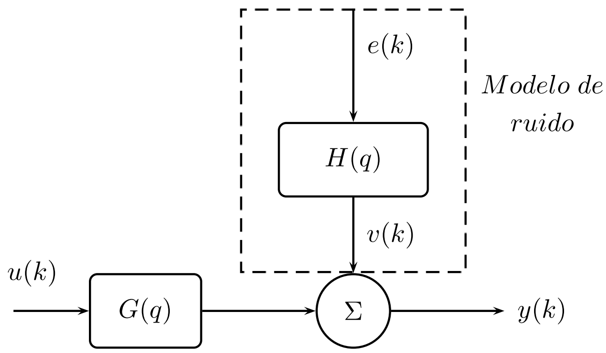

Figura 1. Esquema general para la representación de un sistema dinámico

$G(k)$ es el vector de ganancias del estimador de parámetros, este define en que medida el error de predicción afecta la actualización de un parámetro.

4. Aspectos Generales de un Experimento de Identificación

El siguiente algoritmo permite obtener una representación de tiempo discreto del sistema que se esta identificando, las pruebas se aplican a sistemas estables que operan en lazo abierto.

1. Respuesta escalón del sistema: Esta prueba permite determinar de manera aproximada el tiempo de establecimiento del sistema, a partir de este valor puede seleccionarse el tiempo de muestreo para la adquisición de datos. Algunos criterios son:
   - Sistemas No Oscilatorios: El tiempo de muestreo se calcula según la ecuación:

     $$T_s = \frac{\tau}{N_r}$$

     Donde τ es la constante de tiempo del sistema, N_r es un número entre 8 y 10, T_s es el tiempo de muestreo sugerido.
   - Sistemas Oscilatorios: entre 10 y 20 muestras por cada periodo de oscilación.
2. Una vez seleccionado el tiempo de muestreo se procede a excitar el sistema con un señal de entrada cuyo contenido frecuencial sea lo suficientemente rico como para obtener en la salida toda la información relevante del comportamiento del proceso.
3. Eliminación de los datos correspondientes a la respuesta transitoria y eliminación de componentes D.C en las señales de entrada y salida.

5. Conclusiones

Un aspecto fundamental es la válidación del modelo, esta se hace con base en pruebas de blancura de ruido, consistentes en analizar el error de predicción-diferencias entre la salida medida y la predicha a partir del vector de parámetros estimado- si este constituye una señal de ruido blanco, es decir si hay una señal donde hay total independencia estadística de sus valores entre diferentes instantes de tiempo, se dice que el modelo se ajusta perfectamente a los datos y el modelo se considera válido.
Los anteriores supuestos son dificiles de garantizar cuando se identifican sistemas reales, el objetivo de identificar un sistema es formarse una idea de su comportamiento dinámico, el diseño de un controlador nunca debe partir de: *”’Se tiene un modelo matemático perfecto del sistema”’* siempre debe considerarse la incertidumbre asociada con los valores de los coeficientes del modelo-Incertidumbre estructurada- y la inceridumbre asociada con las dinámicas No modeladas -Incertidumbre No Estructurada-

Referencias

[1] Lennart Ljung. System Identification, Theory For The User. Prentice Hall, 1999.
[2] Rengifo C.F. Identificacion de Sistemas Dinámicos en Lazo Cerrado. Tesis de Maestría. Univalle.1995
[3] Torsten Soderstrom, Petre Stoica. System Identification. Prentice Hall, 1989.