CÁLCULOS COSMOLÓGICOS EN UN UNIVERSO NEWTONIANO

Alejandro Ferrero
Universidad de los andes
(Recibido 28 de Sep.2005; Aceptado 04 de Enr.2006; Publicado 28 de Abr. 2006)

RESUMEN

Mediante la ley de gravitación de Newton y la conservación de la energía, se puede llegar a la ecuación de Friedmann. Se obtiene la misma expresión encontrada usando relatividad general si se cambia la densidad de masa por densidad de energía, lo cual está justificado por la equivalencia entre ambas propuesta por Einstein: $E=mc^2$. Este procedimiento es útil para introducir a un estudiante que no tenga conocimiento de relatividad general. Se muestra la evolución del universo a partir de los diferentes parámetros cosmológicos y los valores necesarios de éstos para que el universo se contraiga o no nuevamente. Se puede ver que un universo con constante cosmológica negativa da origen a una segura contracción, mientras que un valor positivo de esta expandirá el universo eternamente si la densidad de materia o radiación no es lo suficientemente grande. Se da una solución numérica y una aproximación analítica que muestre este hecho.

Palabras claves: Friedmann, Expansión, Cosmología.

ABSTRACT

Using Newton's gravitational law and energy conservation, one can obtain Friedmann's equation. One gets the same expression found in General Relativity by changing mass density for energy density. This is justified by Einstein's equivalence principle $E=mc^2$. This procedure is useful for introducing a student with no knowledge of General Relativity. The evolution of the universe is shown as a function of the density parameters. One can note that a universe with a negative value for the cosmological constant always makes the universe contract again. Conversely, a positive value will expand the universe unless the matter or radiation density is large enough. Numerical and analytical approximations are furnished to show this fact.

Keywords: Friedmann, Expantion, Cosmology.

1. INTRODUCCIÓN

La expansión del universo es explicada correctamente por la relatividad general; la ecuación de Friedmann puede ser obtenida mediante las ecuaciones de campo de Einstein usando la métrica Robertson Walker [1]. Sin embargo el estudio de la relatividad general requiere de herramientas poco manejadas por estudiantes no muy experimentados.

En este artículo se muestra una forma más simple de obtener la ecuación que describe la expansión del universo (ecuación de Friedmann) mediante el uso de la mecánica newtoniana. El desarrollo del universo puede ser entendido sin el uso complicado de objetos matemáticos como el tensor de Riemann.

2. COSMOLOGÍA ESTÁNDAR

El desarrollo estándar se basa en la métrica Robertson Walker y mediante la solución de las ecuaciones de campo de Einstein [2]. Mediante un desarrollo usual se puede obtener la ecuación de Friedmann [2].

$$\left(\frac{dA(t)}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G}{3}\rho A(t)^2 - k, \tag{1}$$

donde ρ es la densidad de energía, A(t) es el factor de escala, k la curvatura y G la constante de Newton. Usualmente la densidad de energía recibe contribución de la radiación, la materia (puede que ésta sea invisible) y el vacío o campo escalar asociado a éste [1] (en algunos textos asociado a la constante cosmológica). La evolución del universo, se obtiene resolviendo (1).

3. DESARROLLO SEMICLÁSICO

Consideremos ahora al universo como un gas homogéneo e isotrópico expandiéndose sobre una esfera de radio R [3], considerando una galaxia como una partícula puntual ubicada en el centro de la esfera con masa m, la energía total de la galaxia (cinética mas potencial gravitacional) viene dada por [3]

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{dR(t)}{dt}\right)^2 - \frac{GmM}{R(t)} = E, \tag{2}$$

en donde M es la masa total del universo. Expresando ésta en términos de la densidad de la esfera, (2) toma la forma

$$\frac{2E}{m} = \left(\frac{dR(t)}{dt}\right)^2 - \frac{8}{3}\pi G\rho\, R(t)^2. \tag{3}$$

Basados en el principio de equivalencia (note que aquí estamos introduciendo un concepto relativístico), podemos relacionar la energía total del universo E con la curvatura del universo introducida en (1) (en relatividad general, cualquier forma de energía curva el espacio tiempo y esto justifica la relación). Para encontrar la relación, como la energía es constante, se puede encontrar un tiempo t_1 tal que

$$k \equiv -\frac{2}{mR(t_1)^2 H(t_1)^2} = -1, 0, 1, \quad con, \quad H(t_1) \equiv \frac{1}{R(t_1)^2}\left(\frac{dR(t)}{dt}\right)^2\Bigg|_{t_1} \tag{4}$$

la constante de Hubble al tiempo t_1. Note de (4) que si $E > 0$ la curvatura es negativa, si $E = 0$ la curvatura es nula, mientras que si $E < 0$ la curvatura es positiva, lo que es consistente. Con esta forma para la energía, (3) toma la forma

$$\left(\frac{dR(t)}{dt}\right)^2 = \frac{8\pi G_N}{3}\rho R(t)^2 - kR(t_1)^2 H(t_1)^2. \tag{5}$$

Note que salvo constantes irrelevantes, (5) es la misma ecuación de Friedmann (1).

4. SOLUCIÓN A LA ECUACIÓN DE FRIEDMANN

Para resolver la ecuación de Friedmann, es necesario conocer la densidad del universo. Basados en el principio de equivalencia, la energía recibe tres tipos de contribuciones, de la materia, la radiación y el vacío, éstas se denotarán con los índices *m*, *r*, *v* respectivamente. Asumimos que la expansión del universo es adiabática [1]. Introduciendo las definiciones

$$\tilde{R}(t) \equiv \frac{R(t)}{R(t_1)}, \qquad \Omega_i \equiv \frac{8\pi G_N \rho_i(t_1)}{3H(t_1)^2}, \qquad \Omega \equiv \sum_i \Omega_i, \tag{6}$$

la ecuación (5) toma la forma [1]

$$\left(\frac{d\,\tilde{R}(t)}{dt}\right)^2 = H(t_1)^2\left(\Omega_v\,\tilde{R}(t)^2 + \Omega_m\,\tilde{R}(t)^{-1} + \Omega_r\,\tilde{R}(t)^{-2} - (\Omega - 1)\right), \tag{7}$$

con $k = \Omega - 1$. Note que la ecuación (10) nos permite trabajar con una densidad adimensional.

A continuación se muestran algunas gráficas para la evolución del universo en función de los diferentes parámetros. La condición inicial es $R(0) = 0$ (*big bang*), el tiempo se mide en unidades de $H(t_1)^{-1}$. Cabe resaltar que los valores más aceptados para nuestro universo son $\Omega_v \sim 0.7$, $\Omega \sim 0.3$ [4].

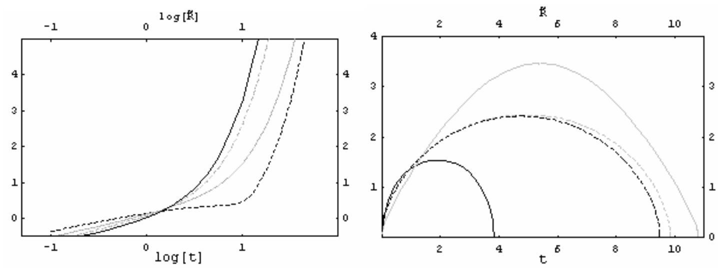

Figura No 1. Evolución del factor de escala para Ω v , Ω m, Ω r = (0.4 ; 0.5 ; 0) respectivamente (línea gris punteada), (0.1 ; 0.5 ; 0.1) (línea gris) y (0.1 ; 1.8 ; 0.5) y (0.7 ; 0.3 ; 0) líneas negra punteada y contínua en orden respectivo (gráfica izquierda). En la gráfica de la derecha usamos en el mismo orden los valores (0.001 ; 1 ; 0.5), (-0.07 ; 0.2 ; 0.1), (0 ; 1 ; 0.5) y (0.2 ; 2 ; 1).

En la figura 1 se puede apreciar como el efecto de la densidad del vacío es expandir aceleradamente el universo (si ésta es positiva). Un valor negativo de esta última produce una segura contracción. El universo se puede volver a colapsar si la densidad de materia y radiación es muy grande o bien si la constante cosmológica es pequeña. Parece que el término que más influye en la expansión del universo es del vacio y de hecho así lo es.

La figura 2 muestra (como se espera) que entre más energía de vacío exista, más materia o radiación se requiere para frenar la expansión. La inclusión de ambos parámetros disminuye la cantidad requerida. Parece más efectiva la radiación que la materia para detener el universo. Es importante resaltar que cuando alguna de estas es cero, un valor de uno para el otro parámetro, produce la contracción (esto es equivalente a decir que cuando la masa del universo es la crítica, la geometría de éste es plana). Las aproximaciones analíticas usadas en la figura 2 son:

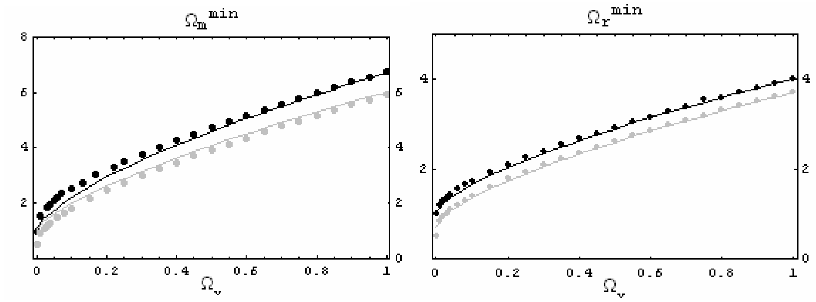

Figura No 2. Mínima densidad de materia necesaria para contraer el universo en función de la densidad de vacío. Los puntos representan la solución numérica y las líneas contínuas una aproximación analítica. El color negro es para una densidad de radiación de 0 y el gris de 0.5 (izquierda). Mínima densidad de radiación necesaria para contraer el universo en función de la densidad de vacío. Los puntos representan la solución numérica y las líneas contínuas una aproximación analítica. El color negro es para una densidad de materia de 0 y el gris de 0.5.

$$\begin{aligned} &\Omega_m^{\min}(\Omega_v, \Omega_r = 0) = 5.7(\Omega_v)^{2/3} + 1, \qquad \Omega_m^{\min}(\Omega_v, \Omega_r = 0.5) = 5(\Omega_v)^{2.1/3} \\ &\Omega_r^{\min}(\Omega_v, \Omega_m = 0) = 3(\Omega_v)^{3.3/5} + 1, \qquad \Omega_r^{\min}(\Omega_v, \Omega_m = 0.5) = 3(\Omega_v)^{3.3/5} + 0.7 \end{aligned} \tag{8}$$

CONCLUSIONES

En el presente artículo se ha analizado inicialmente la posibilidad de encontrar la ecuación de Friedmann sin usar el formalismo de relatividad general, se puede concluir que esto sí se puede lograr aplicando mecánica newtoniana siempre y cuando tengamos en cuenta el principio de equivalencia, que es un concepto relativista.

Las gráficas muestran que con los valores observados para la densidad del universo, éste se expandirá por siempre, además lo está haciendo de forma acelerada debido a la presencia de la densidad del vacío. La presencia de una constante cosmológica produce una expansión acelerada, a no ser que exista mucha densidad de materia o radiación. Aunque sólo utilizamos la condición de un tamaño inicial del universo infinitamente pequeño o en otras palabras la existencia de un *big bang*, es de esperarse que para un tamaño inicial diferente de cero la situación no cambie (la única diferencia es un corrimiento que se hace absolutamente despreciable después de cierto tiempo). La curvatura del universo puede ser reexpresada en términos de los tres parámetros tratados reduciendo el número de incógnitas del sistema. Cuando la densidad total del universo es justo 1, obtenemos una geometría plana que es lo que se acepta actualmente.

REFERENCIAS

[1] J. A. Peacock, Cosmological Physics, Cambridge University Press (1999).
[2] J. Foster, D. Nightingale, A short course in general relativity, Springer Verlag (1995)
[3] Thomas. F. Jordan, Cosmology calculations almost withot general relativity, arXiv:astro-ph/0309756Dic 2004
[4] The Particle Data Group, Phys. Rev D 50 (1994) 3.