

MOVIMIENTO DE UN SÓLIDO PUESTO EN ROTACIÓN POR INTERMEDIO DE UNA UNIÓN ELÁSTICA

William F. Alarcón Rodríguez, Jose Ordoñez Rojas, D. A. Landínez Téllez
I. Grupo de Física de Nuevos Materiales, Departamento de Física, Universidad Nacional de Colombia, A.A. 14490, Bogotá DC

(Recibido 25 de Oct.2005; Aceptado 13 de Enr.2006; Publicado 28 de Abr. 2006)

RESUMEN

El movimiento de un sólido puesto en rotación es complejo por la gran cantidad de variables que pueden incidir en la rotación del mismo, limitando las variables que tienen que ver con la forma del sólido y las velocidades de rotación se pueden hacer consideraciones y despreciar algunos efectos que serian producidos en otras condiciones, con base en estas apreciaciones se pretende demostrar que el movimiento de un sólido puesto en rotación por medio de una unión elástica es estable solo en torno del eje de máxima inercia e inestable en todos los demás.

Palabras clave: Instrumentación, física general

ABSTRACT

The movement of a solid put into rotation is complex by the amount of variables that can affect the rotation of such. By limiting the variables related to its form and the speeds of rotation, some interesting effects can be observed. Based upon these appreciations, we try to demonstrate that the movement of a solid put into rotation by means of an elastic union is stable only around the axis of maximum inertia.

Keywords: Instrumentation, General Physics.

1. INTRODUCCION

El movimiento elemental de un sólido sometido a fuerzas cualesquiera, consiste, como es sabido en la traslación instantánea que produciría la resultante general si toda la masa estuviese concentrada en el centroide o centro gravitatorio, juntamente con la rotación instantánea que, en torno de dicho punto, produciría un par de fuerzas cuyo momento fuese igual al momento dinámico, o momento resultante de las fuerzas con relación al referido centroide. Este último movimiento admite una interpretación que es posible poner a prueba experimentalmente. Si el sólido se halla primitivamente en reposo o animado de un movimiento rectilíneo y uniforme, empieza a girar en torno del radio vector que va del centroide al punto de tangencia del elipsoide con un plano perpendicular al citado momento. Una propiedad muy importante del momento de inercia es que un cuerpo rígido cualquiera, así sea uno muy irregular, posee tres ejes perpendiculares entre si a través del centro de masa, de manera tal que el momento de inercia con respecto a uno de estos ejes es el valor máximo posible para cualquier eje a través del centro de masa, el momento de inercia con respecto a otro eje tiene el menor valor posible y el momento de inercia con respecto al tercer eje es intermedio entre estos dos o igual a uno de ellos. Estos ejes se llaman ejes principales del cuerpo y tienen la importante propiedad que si el cuerpo esta

rotando con respecto a uno de ellos, su momento angular esta en la misma dirección que su velocidad angular. Para un cuerpo con ejes de simetría, los ejes principales están según los ejes de simetría.

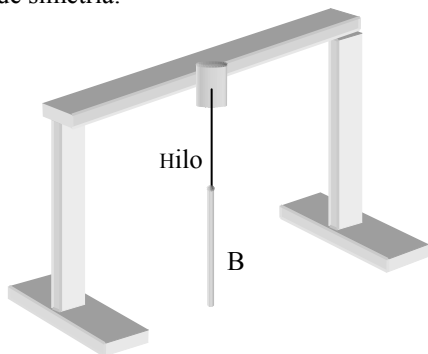


Figura 1: Montaje Experimental

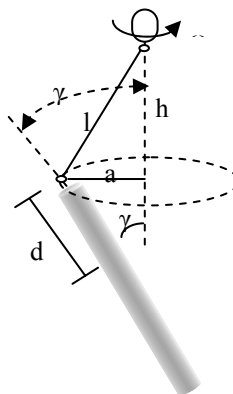


Figura 2: Mediciones Tomadas

2. APARATO EXPERIMENTAL.

Como se puede observar en la figura 1, se utilizó una estructura de madera que sirvió como soporte para el motor eléctrico (A) que a su vez sostenía el hilo y el cilindro alargado (B), como cilindro alargado se utilizó una barra de madera con forma de cilindro, puesto que este objeto resulto ser muy liviano y ya que en el análisis se tomo el peso del hilo despreciable se ubico una masa en el centro de la barra de madera para que el peso del hilo no afectara en la toma de los datos. A continuación, el problema a afrontar fue el de cómo hacer la medición del ángulo γ que se puede observar en la figura 2; para ello se midió la longitud del hilo cuando el motor estaba en reposo, esta longitud es la que corresponde a l en la figura 2, luego durante la rotación se tomaron medidas de la longitud h la cual correspondía a la distancia entre la argolla del motor eléctrico hasta la altura a la cual la barra llegaba gracias a la velocidad angular ω , con la cual el motor la hacia girar. De este modo utilizando el teorema de Pitágoras se puede encontrar el valor de a , que correspondería al radio de la circunferencia que se forma durante la rotación de la barra, luego durante el reposo se midió la distancia desde la argolla de la barra de madera hasta el centro de masa de la misma, esta distancia (d) conjuntamente con la distancia (a) permite encontrar el seno del ángulo γ para el análisis de los datos. La teoría dice que el resultado experimental es valido para cuerpos de forma cualquiera, se consideró para mayor sencillez, el caso de un cuerpo de revolución colgado de un punto de su eje. Con el fin de simplificar el problema, se supone que el hilo es tan largo, y que el cuerpo gira tan de prisa, que los cambios de energía potencial debidos a los movimientos del centro gravitatorio a lo largo de la vertical son despreciables frente a la energía cinética, por supuesto lo dicho es inaplicable cuando el cuerpo gira despacio.

3. RESULTADOS Y DISCUSIÓN.

La condición de ser constante la torsión del hilo se expresa así:

$$\dot{\Psi} + \dot{\Phi} = \omega \quad \text{Si } \gamma \leq \pi/2 \quad (1)$$

$$\dot{\Phi} - \dot{\Psi} = \omega \quad \text{Si } \gamma > \pi/2 \quad (2)$$

Donde Φ representa la presesión y Ψ el giro del cuerpo en torno de su eje de revolución. En ausencia de la ligadura y tratándose de un sólido de revolución que parte del reposo, el ángulo de nutación γ permanecerá constante, y se cumplirá la siguiente relación:

$$(I_3 - I_1)\dot{\Phi} \cos \gamma + I_3\dot{\Psi} = 0 \quad [3]$$

Donde I_3 e I_1 son los momentos de inercia presentes en la rotación.

De acuerdo a la expresión [3] serian posibles infinitas formas de movimiento, obteniéndose una u otra según la posición del sólido al comenzar el movimiento. Se trata de averiguar cual de ellas es compatible con la ligadura.

El criterio que aplicaremos será el siguiente: para probar si es estable una forma de movimiento, daremos al ángulo de nutación γ (que es la única variable independiente en virtud de [1], [2] y [3], un incremento virtual $d\gamma$; si la energía cinética T crece (la potencial no interviene), será prueba de que la fuerza de ligadura a que equivale la constancia de la torsión del hilo, ha efectuado un trabajo positivo y, por tanto, la referida modificación del movimiento será real, dicho de otro modo, el movimiento será estacionario cuando la energía cinética sea máxima, ahora bien la energía cinética esta dada por:

$$2T = I_1 (\dot{\Phi}^2 \text{Sen}^2 \gamma + \dot{\gamma}^2) + I_3 (\dot{\Phi} \cos \gamma + \dot{\Psi})^2 \quad [4]$$

O bien en virtud de [1], [2] y [3], y puesto que $\dot{\Psi} = 0$:

$$2T = \frac{I_1 \text{Cos}^2 \gamma + I_3 \text{Sen}^2 \gamma}{[I_3 \pm (I_3 - I_1) \text{Cos} \gamma]^2} \omega^2 I_1 I_3 \quad [5]$$

Debiéndose tomar el signo inferior, si $\gamma \leq \pi/2$ y el superior si $\gamma \geq \pi/2$, resulta entonces que el signo de $dT/d\gamma$ es el mismo que el de, el numerador obtenido por la derivación de la expresión [5] respecto a γ , ya que el denominador queda elevado a una potencia par y que al simplificar obtenemos::

$$(I_3 - I_1) (\pm 1 + \text{Cos} \gamma) \text{Sen} \gamma \quad [6]$$

De la discusión de esta expresión resulta inmediatamente que para el cilindro alargado $I_3 < I_1$ $dT / d \gamma$ es > 0 Si $\gamma \leq \pi/2$ o $dT / d \gamma < 0$, Si $\gamma \geq \pi/2$. En ambos casos resulta estable la rotación en torno del eje de máxima inercia, e inestable en todas las demás formas de movimiento.

Se hicieron por lo tanto mediciones del ángulo γ y T , estos resultados se presentan en la tabla 1; el valor de T fue obtenido por medio de la toma de datos de velocidad angular del motor en función de la tensión sobre el motor con lo cual se obtuvo la grafica de la figura 3.

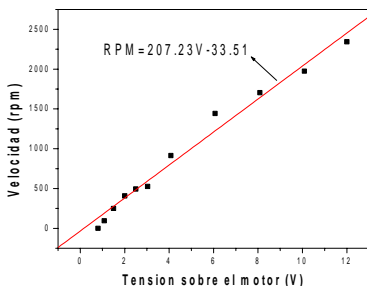


Figura 3: velocidad (RPM) vs. Tensión sobre el motor

Tal como se explico anteriormente, para hacer la medición del ángulo γ fue necesario tomar las distancias, h, d y l para obtener a, tal y como se muestra en la figura 2 para con ellas poder obtener el valor del ángulo, los valores obtenidos para distintos voltajes fueron $l = 13.5 \pm 0.1$ cm y $d = 8.1 \pm 0.1$ cm

Tabla 1. Datos obtenidos del experimento

Distancias Necesarias para Calculo de Angulo γ			Datos finales	
Voltaje (V) ± 0.2	H (cm) ± 0.2	a (cm) ± 0.30	T (s)	γ (°)
1.5	13.2	2.83	0.216	20.45
3.0	12.9	3.98	0.102	29.43
4.5	12.5	5.10	0.068	39.02
6.0	12.1	5.99	0.050	47.69
7.5	11.7	6.73	0.039	56.19
9.0	11.3	7.39	0.033	65.83
12.0	10.9	7.96	0.024	79.33

De la figura 3 podemos obtener el valor del periodo (T) para cada voltaje ya que esta ofrece la ecuación de la recta que mejor se ajusta a los datos de funcionamiento del motor para determinados voltajes y el ángulo lo obtenemos de acuerdo a la expresión:

$$\gamma = \text{Sen}^{-1}(a/d)$$

Se puede observar que como se había concluido en el análisis del movimiento rotacional de la barra cilíndrica la relación T/γ es positiva siempre, ya que los valores de γ son \leq que $\pi/2$. Hay que tener en cuenta que la incertidumbre en los valores de las mediciones de los datos en el voltaje y por lo tanto en el periodo se deben a que el voltaje obtenido de la fuente no es uniforme como se supone que debería ser para el cálculo del periodo.

REFERENCIAS.

[1] Las Ciencias, Revista Científica, Año VII, Numero 4.
 [2] Resnick Robert, Halliday David, Física Parte I, Segunda Edición, México D.F.
 [3] Feynman Richard P, Leighton Robert B, Física Volumen I, Mexico, (1998).