Control de estados cuánticos: aplicación al sistema de dos niveles

Gina Useche, Karen Fonseca-Romero
Grupo de Física de la Materia Condensada, Departamento de Física,
Universidad Nacional, Bogotá, Colombia

Resumen Se hace una introducción al problema de control de un sistema cuántico. Se revisa la interacción de campos electromagnéticos con sistemas electrónicos que son, efectivamente de dos niveles. Se formula el problema de control cuántico para un sistema idealizado de dos niveles. Este control se lleva a cabo a través del vector de Bloch, el cual se usa como una de las variables dinámicas de un funcional de costo adecuadamente definido. El funcional se optimiza como un problema de control óptimo "clásico"que finalmente nos lleva a una solución exacta.

Introducción En los últimos veinte años se han estado realizando estudios que conectan la mecánica cuántica con la teoría de información. En particular, se buscan los elementos físicos necesarios para implementar objetos como el computador cuántico y para realizar transmisión de información de una manera más segura (criptografía cuántica), entre otros. Teóricamente se encontró que para la realización de un computador cuántico son necesarias las compuertas lógicas cuánticas, las cuales son diferentes de las clásicas, ya que ahora no se tendrá un estado único en un tiempo dado sino una superposición de estados. Para la implementación de estas compuertas lógicas se debe tener una colección de bits cuánticos (*qubits*), sobre los cuales operan dichas compuertas. Un bit cuántico es simplemente un sistema de dos niveles como los dos estados de espín de una partícula 1/2, dos estados particulares de un átomo o la polarización vertical y horizontal de un fotón.

La manipulación de las compuertas lógicas cuánticas se hace a través de, por ejemplo, la presencia de acoplamiento con campos externos. Así, es necesario realizar un "control de procesos cuánticos", cuyo objetivo es cambiar un estado inicial a un estado final en un tiempo determinado. Pero tales procesos de control no están restringidos a la computación cuántica: actualmente se busca la manera de controlar reacciones químicas usando los mismos principios, y la preparación de estados cuánticos, o ingeniería de estados, se ocupa precisamente del mismo tipo de problema.

El Problema de Control en el Nivel Cuántico El control con un fin determinado de procesos físicos cuánticos ha sido desde largo tiempo el tema de muchas investigaciones. Se formularon y resolvieron problemas de control de microprocesos y ensambles cuánticos para dispositivos láser y plasma, aceleradores de partículas, plantas de energía nuclear y tecnología computacional. Sin embargo, además de que aún no se tiene una teoría general para tal control, la mayor parte de los problemas arriba mencionados tienen que ver con situaciones casi en el límite clásico.

Entre los problemas de control más interesantes tenemos aquellos que son formulados y desarrollados para la optimización de procesos de transición por medio de la radiación, para la optimización de procesos de transferencia de modos de oscilación o para mantener la deformación deseada de los frentes de onda.

Procesos Cuánticos como el Objeto de Control Antes de tratar con la forma del hamiltoniano definido por la naturaleza física de un sistema, señalaremos que el control puede generalmente ser visto como una dependencia explícita del hamiltoniano en el tiempo, o la posibilidad de variar parámetros que de otra forma serían constantes. El control macroscópico de un sistema cuántico puede ser tanto directa como indirecta. En el caso normal el hamiltoniano del sistema está variando directamente con el tiempo de acuerdo con el control requerido. También es posible controlar un sistema cuántico con otro sistema cuántico (que no pueda modelarse como clásico), pero este es un problema mucho más complejo.
Los posibles objetivos de control de sistemas cuánticos pueden ser clasificados de manera similar a la empleada en la teoría de control clásico. De interés primario son los problemas que dirigen un sistema desde un estado a otro, a través, o nó, de una secuencia de estados requeridos. Este objetivo es formulado como condiciones de frontera para el vector de estado o para los operadores dinámicos, los cuales conducen a problemas de frontera de dos puntos o multipunto, respectivamente.

Control Óptimo de Procesos Mecánico-Cuánticos Supongamos tener un ensamble cuántico cuya evolución puede ser definida por la ecuación de Liouville $\dot{\rho} = -i[H, \rho]$ con la condición inicial $\rho(0) = \rho_o$, donde ρ es el operador densidad y H es el hamiltoniano del sistema. El control es realizado a través de la acción directa de campos externos en la energía del sistema. Además, supongamos que el Hamiltoniano que es lineal con respecto a los campos de control u_μ

$$H = H_o + \sum_{\mu=1}^{m} H_\mu u_\mu \tag{1}$$

donde H_o es el hamiltoniano sin perturbar, H_μ es el operador perturbación asociado con los campos $u_\mu = u_\mu(t)$, $\mu = 1, ..., m$, donde la función (vectorial) de control $\vec{u}(t)$ pertenece a una clase determinada de controles admisibles.
Entre los posibles funcionales de control, los más interesantes para aplicaciones físicas son el promedio estadístico de una variable física A, la varianza del observable A en el instante T, el promedio del observable en el intervalo de control [0,T], la energía consumida para el control y el tiempo T para lograr el estado final deseado $\rho(T) = \rho_T$. Cuando el problema de control puede ser resuelto, hace que tenga sentido considerar problemas de optimización aplicados a procesos y sistemas mecánico-cuánticos. Como ya es conocido, la teoría de control óptimo esta adecuadamente desarrollada únicamente para sistemas lineales. Pero la ecuación de Liouville – von Neumann con hamiltoniano (1) es bilineal con respecto al ope-

rador ρ y el control $\vec{u}$. Por lo tanto es necesario desarrollar nuevas aproximaciones que tomen este hecho en cuenta.

Interacción radiación electromagnética y sistema de dos niveles En la aproximación de masa efectiva el hamiltoniano de un electrón interactuando con un campo electromagnético externo clásico se obtiene realizando el llamado acoplamiento mínimo:

$$\boldsymbol{\mathcal{H}} = \frac{1}{2m}\left[\vec{p} - e\vec{A}(\vec{r},t)\right]^2 + e\vec{U}(\vec{r},t) + V(r) \tag{2}$$

donde $\vec{p}$ es el momento canónico, $\vec{A}(\vec{r},t)$ y $\vec{U}(\vec{r},t)$ los potenciales escalar y vector, y V(r) el campo electrostático. Este hamiltoniano se vuelve más tratable en la aproximación dipolar

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 - e\vec{r} \bullet \vec{E}(\vec{r}_0,t) = \frac{p^2}{2m} + V(r) - e\vec{r} \bullet \vec{E}(\vec{r}_0,t), \tag{3}$$

que para un sistema de dos niveles interactuando con una onda electromagnética se convierte en:

$$H = H_0 + H_I, \quad H_0 = \frac{1}{2}(\epsilon_+ + \epsilon_)I + \frac{\hbar\delta\omega}{2}\sigma_z, \tag{4}$$

$$H_I = \sum_{i,j=\pm} |i><i|er|j><j|E(t), \tag{5}$$

donde $I, \sigma_x, \sigma_y, \sigma_z$, están definidas de la forma usual. Reescribiendo el hamiltoniano anterior, en términos de las matrices de Pauli se llega a la ecuación de Liouville – von Neumann para la matriz densidad:

$$\begin{aligned}\dot{\rho} = \frac{1}{i\hbar} \quad & \left[\tfrac{1}{2}\left(\epsilon_+ + \epsilon_-\right)I + \tfrac{1}{2}\left(g_+ + g_-\right)IE(t) + g_{+-}E(t)\sigma_x \right.\\ & \left. + \left(\tfrac{1}{2}\left(\epsilon_+ - \epsilon_-\right) + \tfrac{1}{2}\left(g_+ - g_-\right)E(t)\right)\sigma_z, \rho\right]\end{aligned}$$

Transformando tal ecuación en términos del vector de Bloch $\vec{s} \equiv \text{Tr}\ \vec{\sigma}$, se obtiene la ecuación de Bloch

$$\frac{d}{dt}\left\{\begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array}\right\} = \left(\begin{array}{ccc} 0 & -\frac{1}{\hbar}\delta\omega & 0 \\ \frac{1}{\hbar}\delta\omega & 0 & -\frac{2}{\hbar}g_{+-}E(t) \\ 0 & \frac{2}{\hbar}g_{+-}E(t) & 0 \end{array}\right)\left\{\begin{array}{c} s_1 \\ s_2 \\ s_3 \end{array}\right\} \tag{6}$$

donde $g = \frac{2}{\hbar}g_{+-} = \frac{2}{\hbar} < +|ex|- >$. Este problema no es suficientemente sencillo para resolverlo analíticamente, de manera que formularemos un problema idealizado más simple.

Control Óptimo del Vector de Bloch El hamiltoniano de control más general para un sistema de dos niveles es

$$H = h_0 I + \vec{h} \bullet \vec{\sigma}.$$

En este caso el problema formulado es el de conducir un estado inicial a un estado final en un tiempo determinado. Formulamos este problema como un problema de control "clásico"para el vector de Bloch, definiendo el siguiente funcional de costo, en el cual se busca minimizar la energía requerida para realizar esta acción.

$$S = \int_{t_0}^{t_f} dt \left\{ \frac{1}{2}\vec{b} \bullet \vec{b} + \vec{\lambda} \bullet \left(\dot{\vec{s}} - \vec{b} \times \vec{s} \right) \right\}, \tag{7}$$

donde $\vec{b} = 2\vec{h}/\hbar$.
Usando el procedimiento usual de minimización del funcional se obtienen las ecuaciones de Euler-Lagrange

$$\vec{b} = \vec{s} \times \vec{\lambda}, \quad \dot{\vec{s}} = \vec{b} \times \vec{s}, \quad \dot{\vec{\lambda}} = \vec{b} \times \vec{\lambda}. \tag{8}$$

Finalmente se obtienen las soluciones para este funcional de costo:

$$\vec{s}(t) = \frac{\sin(b(t_f - t))}{\sin(bt_f)}\vec{s}_0 + \frac{\sin(bt)}{\sin(bt_f)}\vec{s}_f, \tag{9}$$

donde

$$\vec{b} = \frac{1}{t_f}\mathrm{ArcSin}\left(\frac{\|\vec{s}_0 \times \vec{s}_f\|}{s^2} \right) \frac{\vec{s}_0 \times \vec{s}_f}{\|\vec{s}_0 \times \vec{s}_f\|}. \tag{10}$$

Hemos visto que es posible formular y resolver analíticamente el problema de llevar un estado inicial de un sistema de dos niveles S_0 a uno final S_f en un tiempo finito usando el hamiltoniano (1). Resta formular y resolver este mismo problema de control, pero usando el sistema de de ecuaciones (6), en cual poseemos solamente un campo de cantol, $E(t)$. Como ya se mencionó este problema es más complicado y está siendo investigado actualmente.

Agradecimientos Este trabajo ha sido parcialmente financiado por la DINAIN-UN.

Referencias

[1] C. Cohen–Tannoudji, B. Diu, F. Laloe. Quantum Mechanics. John Wiley & Sons, Francia, 1977.

[2] M.O. Scully, M.S. Zubairy. *Quantum Optics*, Cambridge University Press, 1997.

[3] A.G. Butkovskiy, Y. Samoleinko. *Control of Quantum-Mechanical Process and Systems*. Kluwer Academic,1984.

[4] L. Mandel. *Optical Coherence and Quantum Optics*, 1995.