¿PARA QUE SIRVEN LAS DESIGUALDADES DE BELL?

Diego Torres, Universidad Nacional de Colombia, Bogotá *

23 de octubre de 2001

Resumen

Se muestra la utilidad de las desigualdades de Bell en la creación de tests experimentales que contrasten las *Teorías Realistas Locales* con la *Teoría Cuántica*. Se incluye la demostración de Bell de un modelo propuesto por Wigner.

En su famoso artículo de 1935 Einstein, Podolsky y Rosen EPR[1] apoyándose en criterios de realidad y separabilidad, concluyen mediante la realización de un experimento hipotético que la función de onda de la mecánica cuántica no provee una descripción completa de la realidad de un sistema físico.

En 1957 D. Bohm y Aharonov[2] proponen un sistema EPR reproducible en un laboratorio, y en 1964 J.S. Bell publica sus desigualdades basado en la validez de las *Teorías Realistas Locales* TRL, estableciendo así la posibilidad de contrastar las TRL, con la mecánica cuántica.

El objetivo del presente artículo es realizar una demostración sencilla de las desigualdades de Bell de un modelo propuesto por Wigner, mostrando la condición de *no localidad* de la teoría cuántica, y la imposibilidad de completar la teoría cuántica a partir de una *Teoría Realista Local*.

1 TEORÍAS REALISTAS LOCALES

Una TRL posee tres características principales que son:

1. REALISMO: Las regularidades que aparecen en los fenómenos observados están causados por alguna realidad física independiente del observador.

2. INDUCCIÓN: La inferencia inductiva es una forma válida de razonamiento a través de la cual pueden deducirse conclusiones legítimas a partir de observaciones coherentes.

*diegot@ciencias.unal.edu.co

3. LOCALIDAD: Tambien llamada “separabilidad” de Einstein, establece que ningún tipo de influencia puede propagarse a mayor velocidad que la de la luz.

Como criterios de realidad y completez tomaremos los mismos criterios postulados por EPR en su artículo y que citaremos a continuación:

- *COMPLETEZ:* Para que una teoría sea completa es necesario que cada elemento de la realidad física tenga un elemento correspondiente en la teoría física.
- *REALIDAD:* Es condición suficiente de realidad la siguiente: “Si sin perturbar en modo alguno el sistema podemos predecir con certeza (es decir con probabilidad igual a uno) el valor de una cantidad física, entonces existe un elemento de la realidad correspondiente a dicha cantidad física”.

Un ejemplo de una *TRL* es la “Relatividad”; así como algunas teorías de variables ocultas que buscan hacer que la teorías cuántica sea determinista y cumpla el principio de localidad.

2 ELEMENTOS DE LA REALIDAD FÍSICA EN UN EXPERIMENTO TIPO *EPR*

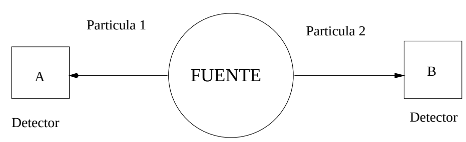

Figura 1: Sistema EPR

En la figura 1 hay una fuente de protones en estado singlete, los pares de partículas producidos están correlacionados y poseen un espín total cero. Suponemos que cada uno de los protones sale en direcciones opuestas hacia los detectores A y B; en el detector A mediremos el espín a la partícula 1 sobre el eje que denotaremos por “$\vec{a}$”, mientras que a la partícula 2 le mediremos el espín sobre el eje que denotaremos por “$\vec{b}$”. El ket de estado para un eje arbitrario común puede ser escrito como:

$$|\text{espín singlete}>=\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)(|+>_1|->_2-|->_1|+>_2) \quad (1)$$

Donde los subíndices 1 y 2 se refieren a la partícula sobre la cual puede ser obtenido dicho valor de espín. Los estados correlacionados son estados que no pueden ser factorizables para 2 o más partículas, es decir que para nuestra ecuación (1), este estado no puede ser escrito de la forma:

$$|\text{espín singlete} >= |\mu >_1 |\mu >_2 \qquad (2)$$

Al medir la componente de espín a la partícula 1 sobre el eje "$\vec{a}$" sabremos inmediatamente que la partícula 2 poseerá un espín de signo contrario sobre el mismo eje, de esta manera este valor quedará bien definido, *con certeza*. Podemos decir que este valor de espín es un elemento que *que pertenece a la realidad física*. Un razonamiento igual lo podremos aplicar al medir el signo de espín sobre el eje "$\vec{b}$" en el detector B, es decir que si en el detector B medimos, por ejemplo, "+" en el eje $\vec{b}$ para la partícula 2, la partícula 1 poseerá un valor de espín de "-" sobre el mismo eje $\vec{b}$, y nuevamente podemos decir que este resultado es obtenido con *certeza* (es decir con probabilidad igual a uno), y que además pertenece a la realidad física. Al efectuarse las mediciones suponemos que no se perturba en modo alguno el sistema, compuesto por las dos partículas en estado singlete, ya que estamos respetando el principio de localidad, y que por lo tanto podemos predecir con *certeza* el valor de la componente de espín de una partícula al medir la misma componente sobre la otra partícula.

En este punto haremos énfasis en que este proceso se puede realizar, y no hemos violado ningún postulado de la mecánica cuántica ni el principio de localidad con los supuestos hechos hasta ahora, solo hemos llegado a la conclusión que en este proceso hipotético de medición el valor de espín sobre la partícula que no hemos perturbado corresponde a un elemento de la realidad física y este valor es obtenido con certeza.

3 DESIGUALDADES DE BELL

La mecánica cuántica nos habla de probabilidades en una distribución de partículas, o haces de partículas, y es allí precisamente donde entran las desigualdades de Bell [3]. Derivaremos las desigualdades de Bell de un modelo propuesto por Wigner [4].

Vamos a suponer un conjunto de tres vectores $(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c},)$ en general no mutuamente ortogonales entre sí. Si en este conjunto obtenemos una partícula, perteneciente a un par de estado singlete, a la cual llamaremos de tipo $(\vec{a}-, \vec{b}+, \vec{c}+)$ es por que las proyecciones de espín sobre nuestros tres ejes son respectivamente:

$$S \cdot \vec{a} = -; \quad S \cdot \vec{b} = +; \quad S \cdot \vec{c} = + \qquad (3)$$

Estos valores a pesar de no poder ser medidos simultáneamente, son un elemento de la realidad. De esta manera, en un estado singlete, la otra partícula será entonces de tipo $(a+, b-, c-)$. En cualquiera de los casos, cualquier tipo de partículas de un sistema EPR pertenecerá a uno de los 8 tipos posibles mostrados en la figura 2.

Si suponemos que el detector A mide $S \cdot \vec{a}$ y encuentra un valor de $+$, y que el detector B mide $S \cdot \vec{b}$ y encuentra un valor de $+$, según nuestra tabla este par de eventos son de tipo 3 y 4. El número de veces que este tipo de eventos se dan es por lo tanto:

TIPO	CANTIDAD DE EVENTOS	PARTICULA 1 DETECTOR 1	PARTICULA 2 DETECTOR 2
1	N1	(a+,b+,c+)	(a-,b-,c-)
2	N2	(a+,b+,c-)	(a-,b-,c+)
3	N3	(a+,b-,c+)	(a-,b+,c-)
4	N4	(a+,b-,c-)	(a-,b+,c+)
5	N5	(a-,b+,c+)	(a+.b-.c-)
6	N6	(a-,b+,c-)	(a+,b-,c+)
7	N7	(a-,b-,c+)	(a+,b+,c-)
8	N8	(a-,b-,c-)	(a+,b+,c+)

Figura 2: Componentes de Espín posibles para un estado singlete

$$N3 + N4 \tag{4}$$

Como cada N_i es positivo podemos tener la desigualdad:

$$N3 + N4 \leq (N2 + N4) + (N3 + N7) \tag{5}$$

Denotaremos por $P(\vec{a}+, \vec{b}+)$ la probabilidad de que en una selección aleatoria el detector A al medir $S \cdot \vec{a}$ obtenga $+$, y el detector B al medir $S \cdot \vec{b}$ obtenga $+$. Esta probabilidad será igual a:

$$P(\vec{a}+, \vec{b}+) = \frac{N3 + N4}{\sum N_i} \tag{6}$$

Donde $\sum N_i$ se refiere a la sumatoria de la totalidad de los eventos. Si dividimos la ecuación (5) por $\sum N_i$ obtenemos:

$$P(\vec{a}+, \vec{b}+) \leq P(\vec{a}+, \vec{c}+) + P(\vec{c}+, \vec{b}+) \tag{7}$$

Esta es la desigualdad de Bell que respeta el principio de localidad y por lo tanto está de acuerdo con las Teorías Realistas Locales. Sin embargo en mecánica cuántica si el eje b tiene un angulo con el eje a dado por θ_{ab} la probabilidad está dada por:

$$P(\vec{a}+, \vec{b}+) = \frac{1}{2}\sin^2(\theta_{ab}) \tag{8}$$

Si reemplazamos (8) en (7) obtenemos la desigualdad de Bell según la mecánica cuántica.

$$\frac{1}{2}\sin^2(\theta_{ab}/2) \leq \frac{1}{2}\sin^2(\theta_{ac}/2) + \frac{1}{2}\sin^2(\theta_{cb}/2) \tag{9}$$

Podemos elegir $\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}$, en un mismo plano, de tal manera que $\vec{c}$ bisecte a las direcciones formadas por $\vec{a}$ y $\vec{b}$, de tal forma que se cumpla que:

$$\theta_{ab} = 2\theta; \quad \theta_{ac} = \theta_{cb} = \theta \tag{10}$$

Al introducir esto en la ecuación (7) nos da como resultado:

$$\sin^2(\theta) \leq \sin^2(\theta/2) + \sin^2(\theta/2) \tag{11}$$

Esta desigualdad posee una violación máxima para $\theta = \pi/4$, en donde obtenemos:

$$0.50... \leq 0.29... \tag{12}$$

¡ La mecánica cuántica prevee violaciones a las desigualdades de Bell!. Estas desigualdades son totalmente construidas con base en los criterios de las *TRL*. La demostración matemática es limpia, pero supone de entrada que podemos detectar y medir la componente de espín de todas las particulas generadas en la fuente.

A pesar de la gran cantidad de tests experimentales realizados en la década de los setentas y comienzos de los ochentas[5], incluyendo los de Aspect y colaboradores [6], en los cuales la mayoría le da la razón a la MC, además de experimentos y simulaciones más recientes[7], no existe a la fecha una confirmación contundente respecto a la validez de la violación de las desigualdades de Bell tal y como lo predice la mecánica cuántica. Los experimentos realizados utilizan formas más débiles de las desigualdades en las cuales se supone que las partículas detectadas son una muestra representativa real del total de partículas que salen de la fuente. Sin embargo este argumento democrático es un punto débil que no se ha podido superar. Además, claro está, existen enormes dificultades técnicas en la realización de los experimentos como la baja eficiencia de detección.

4 CONCLUSIONES

Las desigualdades de Bell nos dan un criterio para comprobar la veracidad de las *TRL*. Ellas permiten demostrar que la teoría cuantica es no local, es decir que no cumple con el principio de localidad de Einstein. Violaciones experimentales a las desigualdades de Bell indicarían que aún en la distancia las partículas siguen teniendo algún tipo de interacción, que violaría el principio de localidad cuando las mediciones se realizan de manera simultánea[5].

Una gran conclusión del teorema de Bell es la imposibilidad de completar la teoría cuántica a partir de una *Teoría Realista Local*, si se pretende crear una teoría que reproduzca los resultados de la *MC* se debe sacrificar la localidad.

Para las personas interesadas en ahondar en el tema las referencias les darán una muy buena guía para comenzar a explorar el tema y tratarlo con mayor o menor grado de investigación.[8] [9]

5 AGRADECIMIENTOS

A la profesora Karen Fonseca por sus discuciones y su interés en el desarrollo del presente trabajo, al profesor Alexis Rodríguez por proponérmelo como tema a desarrollar en su curso de mecánica cuántica y a Andrés Martínez por sus comentarios.

Referencias

[1] A. Einstein, B. Podolsky and N. Rosen. Phys. Rev. **47**. 777 (1935).

[2] D.Bohm y Y. Aharonov, Phys. Rev. **108**. 1070 (1957).

[3] J.S. Bell, Physica 1, 195 (1964).

[4] La demostración esta muy claramente descrita en el libro *Modern Quantum Mechanics*, J.J. Sakuray, 1994, Addisson-Wesley, pag 226- 232.

[5] B. d'Espagnat, Investigación y Ciencia, Teoría cuántica y realidad, abril 1997. En este artículo el autor hace una referencia a que no existe una demostración concluyente del principio de relatividad.

[6] A.Aspect, P.Grangier and G.Roger, Phys.Rev.Lett. **49** , 91 (1982). Y Phys. Rev. Lett. **47**. 460 (1981).

[7] W.A.Hofer, *Simulation of Einstein-Podolsky-Rosen experiment with limited efficiency and coherence* xxx.lanl.gov/quant-ph/0103014, 4 Mar 2001.

[8] J.S. Bell, *Speakable and Unspeakable in Quantum Mechanics*, Cambridge University Press, 1993.

[9] F. Selleri, *Quantum paradoxes and Physical Reality*, Hower Academic Publishers, 1990.