

# Interacción de Jaynes-Cummings para un átomo en estado de Glauber-Lachs: Una introducción

P.N. Sánchez L., F. Valencia H., K. M. Fonseca-Romero  
Grupo de Física de la Materia Condensada, Departamento de Física,  
Universidad Nacional, Bogotá, Colombia

**Resumen** En este trabajo estudiamos la interacción de Jaynes-Cummings para un átomo preparado en un estado de Glauber-Lachs. A pesar de su sencillez el modelo describe la mayoría de los hechos relevantes de dicha dinámica, permitiendo ganar intuición física sobre el problema del acoplamiento de átomos y campos electromagnéticos.

**Introducción** El modelo cuántico más simple de interacción de un modo del campo electromagnético con un átomo es el que se conoce como Jaynes-Cummings [1]. Cuando el estado inicial del campo es un estado coherente la inversión de población atómica presenta una secuencia de colapsos y resurgimientos. Cuando se introduce radiación térmica[2] tal secuencia se torna irregular y finalmente es suprimida. En este trabajo revisamos el estudio de tal transición de manera continua empleando los estados de Glauber-Lachs siguiendo la referencia [3].

No existe una solución general para el problema de la interacción de la radiación con la materia. Aproximaciones tales como i) campos electromagnéticos perfectamente monocromáticos y ii) frecuencia del campo (casi) exactamente coincidente con una de las frecuencias de transición (permitidas) del átomo, permiten reducir el problema a un átomo de dos niveles, conceptualmente igual a un sistema de espín 1/2. Además, puesto que el átomo de dos niveles presenta una sola frecuencia de resonancia, como un oscilador armónico clásico, parecería posible un tratamiento clásico del campo. Esto es cierto para muchos de los fenómenos de interacción.

**Átomo de dos niveles e interacción con campos** El modelo más simple de un átomo incluye dos estados ortonormales  $|1\rangle$  y  $|2\rangle$ , que son autoestados del hamiltoniano atómico en ausencia del campo electromagnético, con energías  $\hbar\omega_1$  y  $\hbar\omega_2$ , y  $\omega_2 > \omega_1$ . Un estado atómico general  $|\psi\rangle$  es, entonces, una superposición de estos dos estados,  $a_1|1\rangle + a_2|2\rangle$ , en donde  $|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$ . La cantidad que más nos interesa aquí es la inversión atómica que se define como

$$w(t) = \langle \sigma_z \rangle = |a_1|^2 - |a_2|^2,$$

con  $\sigma_z$  la matriz de Pauli  $|2\rangle\langle 2| - |1\rangle\langle 1|$ .

La interacción entre el dipolo y el átomo se modela bajo la aproximación de dipolo eléctrico, la cual es válida cuando las longitudes de onda del campo son mucho mayores que la separación media entre los electrones y el núcleo.[4] El operador de dipolo eléctrico,  $\hat{\mu} = \vec{\mu}(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-)$ , acopla los dos estados atómicos libres. El término de interacción con el campo electromagnético  $-\hat{\mu} \cdot \vec{E}(t)$ , lleva entonces, al siguiente hamiltoniano para la dinámica del sistema

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2}(\omega_2 + \omega_1)\hat{I} + \frac{\hbar}{2}(\omega_2 - \omega_1)\hat{\sigma}_z - \vec{\mu} \cdot \vec{E}(t)(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-). \quad (1)$$

En el caso particular en el que el campo electromagnético clásico es una onda plana monocromática linealmente polarizada,  $\vec{E}(t) = \vec{E}(0) \cos(\omega t + \phi)$ , donde  $\omega \approx \omega_2 - \omega_1$ , el hamiltoniano (1) se torna

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2}(\omega_2 + \omega_1)\hat{I} + \frac{\hbar}{2}(\omega_2 - \omega_1)\hat{\sigma}_z - \vec{\mu} \cdot \vec{E}(0) \cos(\omega t + \phi)(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-). \quad (2)$$

**Imagen de Interacción** La mecánica cuántica proporciona una serie de descripciones equivalentes de la dinámica de un sistema. En la imagen de Schrödinger los operadores son independientes del tiempo y toda la dinámica está contenida en los estados. En la imagen de Heisenberg los operadores evolucionan mientras los estados son independientes del tiempo. Entre estas dos imágenes se encuentran las imágenes de interacción en que parte de la dinámica, usualmente la asociada con la evolución libre y que se conoce simplemente como imagen de interacción, está contenida en los operadores, mientras las interacciones aparecen en la dinámica de los estados.

Dado que las cantidades medibles, tales como los valores esperados de los operadores deben ser independientes de la imagen en que son evaluados, el vector de estado en la imagen de interacción  $|\psi\rangle_I$  se logra a partir del correspondiente vector en la imagen de Schrödinger  $|\psi\rangle_S$  mediante una transformación unitaria,  $|\psi\rangle_I = U|\psi\rangle_S$ . El vector de estado satisface una ecuación similar a la ecuación de Schrödinger pero con un hamiltoniano modificado  $H_I = \hat{U}\hat{H}\hat{U}^\dagger + i\hbar\hat{U}\hat{U}^\dagger$ . Empleando el operador unitario  $\hat{U} = \exp(\frac{it}{2}[(\omega_2 + \omega_1)\hat{I} + \omega\hat{\sigma}_z])$  sobre el hamiltoniano (2), y usando la aproximación de onda rotante (AOR), la cual descarta los términos rápidamente oscilantes  $\exp(\pm i(\omega_1 - \omega_2 - \omega)t)$  se obtiene el hamiltoniano de interacción

$$H_I = \frac{\hbar}{2}(\Delta\hat{\sigma}_z - \Omega(\hat{\sigma}_+e^{-i\phi} + \hat{\sigma}_-e^{i\phi})), \quad (3)$$

en donde introdujimos los parámetros  $\Delta = \omega_2 - \omega_1 - \omega$  y  $\Omega = \vec{\mu} \cdot \vec{E}_0$ , y los operadores  $\sigma_+ = |2\rangle\langle 1|$  y  $\sigma_- = |1\rangle\langle 2|$ . Nuevamente podemos escribir el estado en cualquier momento como una combinación de los estados 1 y 2. Los coeficientes correspondientes,  $a_1$  y  $a_2$  satisfacen el sistema de ecuaciones

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \Delta & \Omega e^{i\phi} \\ \Omega e^{i\phi} & -\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1(t) \\ a_2(t) \end{pmatrix}.$$

La inversión atómica cuando  $\phi = 0$ , nos encontramos en resonancia ( $\Delta = 0$ ), y comenzamos en el estado  $|1\rangle$  viene dada por  $w(t) = -\cos(\Omega t)$ .

**Campos cuantizados** Partiendo de las ecuaciones de Maxwell en ausencia de fuentes e introduciendo el potencial vector  $\vec{A}$ , se encuentra que éste satisface la ecuación de ondas, y que, portanto, puede expresarse como  $\vec{A}(\vec{r}, t) = \vec{A}^+(\vec{r}, t) + \vec{A}^-(\vec{r}, t)$ , donde el primer(segundo) término contiene las amplitudes que varían como  $\exp(-i\omega t)$  ( $\exp(-i\omega t)$ ). Realizando una expansión usando un conjunto completo de funciones que forman una base y promoviendo los coeficientes a operadores, vemos que el campo eléctrico puede expresarse como  $\vec{E}(\vec{r}, t) = \sum_{\vec{k}} \vec{\epsilon}_{\vec{k}} E_0 [\hat{a}_{\vec{k}} \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} - \omega_{\vec{k}} t)) + \hat{a}_{\vec{k}}^\dagger \exp(i(\vec{k} \cdot \vec{r} + \omega_{\vec{k}} t))]$ , donde  $E_0$  es la densidad de campo eléctrico

por fotón,  $E_0^2 = \hbar\omega_{\vec{k}}/(2\epsilon_0V)$ ,  $\epsilon_0$  es la permitividad dieléctrica del vacío,  $V$  es el volumen ocupado por el campo electromagnético y  $\vec{\epsilon}$  es el vector de polarización. Los operadores de creación y destrucción,  $\hat{a}^\dagger$  y  $\hat{a}$ , satisfacen las relaciones de conmutación bosónicas, es decir, las “partículas” asociadas a cada modo, los fotones, son bosones. Tomando un único modo, omitiendo el índice  $\vec{k}$ , y situando el átomo en el origen de coordenadas tenemos el siguiente hamiltoniano

$$\hat{H} = \frac{\hbar}{2}(\omega_2 + \omega_1)\hat{I} + \frac{\hbar}{2}(\omega_2 - \omega_1)\hat{\sigma}_z + \hbar\lambda(\hat{a}e^{-i\omega t} + \hat{a}^\dagger e^{i\omega t})(\hat{\sigma}_+ + \hat{\sigma}_-). \quad (4)$$

con  $\lambda = -\vec{\mu} \cdot \vec{\epsilon}E(0)$ .

**Hamiltoniano de Jaynes-Cummings** Empleando la misma transformación unitaria que empleamos anteriormente y empleando nuevamente la AOR llegamos al Hamiltoniano de Jaynes-Cummings en la imagen de interacción

$$H = \frac{\hbar\Delta}{2}\sigma_z + \hbar\lambda(a\sigma_+ + a^\dagger\sigma_-).$$

Los términos que son descartados por la AOR son aquellos en que el átomo cae al estado más bajo (sube al más excitado) al tiempo que se absorbe (emite) un fotón, los cuales tienen baja probabilidad de ocurrencia, siempre que  $\lambda$  no sea muy grande. En este caso el estado más general se escribe como  $|\psi\rangle = \sum_n a_{1n}|1n\rangle + a_{2n}|2n-1\rangle$ , y la dinámica de los coeficientes está dada un conjunto infinito de sistemas de dos ecuaciones acopladas

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} a_{1n}(t) \\ a_{2n}(t) \end{pmatrix} = \frac{i}{2} \begin{pmatrix} \Delta & \lambda\sqrt{n} \\ \lambda\sqrt{n} & -\Delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1n}(t) \\ a_{2n}(t) \end{pmatrix},$$

cuyas soluciones presentan oscilaciones a frecuencias de Rabi  $\Omega_n = \sqrt{\Delta^2 + 4\lambda^2n}$ . En resonancia, suponiendo que el estado inicial del sistema es  $|\psi\rangle = |-\rangle \otimes \sum_n a_n|n\rangle$  la inversión atómica se reduce a  $w(t) = -\sum_n |a_n|^2 \cos(\Omega_n t)$ , que es enteramente diferente del resultado clásico, que se obtiene teniendo en cuenta una única frecuencia promedio, es decir, clásicamente perdemos las interferencias entre las diferentes frecuencias. La expresión hallada para la inversión atómica es válida tanto para estados puros como para estados mezclados.

**Mezcla de estados coherentes y térmicos** Aunque la manipulación del campo electromagnético permite la producción de estados puros, la inevitable interacción de átomo y campo electromagnético confinado en la cavidad con grados de libertad externos, hace necesaria la consideración de la introducción de ruido térmico. Podemos estudiar la transición de comportamiento de estados coherentes a estados térmicos empleando los estados de Glauber-Lachs[5], los cuales presentan la siguiente distribución de fotones

$$P_{GL}(n) = \frac{N^n}{(1+N)^{n+1}} \exp\left(\frac{|\alpha|^2}{1+N}\right) L_n\left(-\frac{|\alpha|^2}{N(1+N)}\right),$$

en donde  $|\alpha|^2$  es el número de fotones coherentes y  $N$  es el número medio de fotones térmicos. La figura muestra que a medida que se introducen fotones

térmicos, el fenómeno característico de los colapso y resurgimientos se diluye en el tiempo, primero uno colapsos y resurgimientos adyacentes se mezclan y luego el comportamiento se trnq caótico, lo que quiere decir que la introducción de fotones térmicos es análogo a la introducción de ruido en el sistema. A diferencia del caso clásico, el átomo nunca vuelve a encontrarse exclusivamente en  $|1\rangle$  o  $|2\rangle$ , pues la inversión atómica no vuelve a ser  $\pm 1$ .

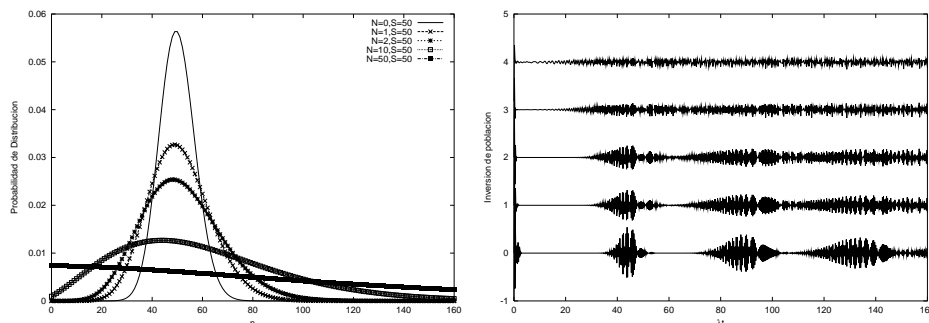


Figura 1: Derecha: Inversión atómica para los estados GL con 50 fotones coherentes y, de abajo hacia arriba, 0,1,2,10 y 50 fotones térmicos. Izquierda: Distribución de probabilidad para estos mismos estados.

**Conclusiones** Presentamos una rápida introducción a la óptica cuántica abordando el problema de un átomo de dos niveles interactuando con un modo de radiación electromagnética, clásico y cuántico, calculándose la inversión atómica en ambos casos. Finalmente se reprodujo la atenuación de los procesos de colapso-resurgimiento usando los estados de Glauber-Lachs que permiten la adición de radiación térmica a los estados coherentes.

**Agradecimientos** Los autores agradecen la financiación parcial de este trabajo a la DIB-UN.

## Referencias

- [1] E.T. Jaynes, F.W. Cummings. Proc. IEEE **51**, 89 (1963); F.W. Cummings, Phys. Rev. **140**, A1051 (1965).
- [2] P. Meystre *et. al.*, Nuovo Cim. **B25**, 521 (1975); P.L. Knight, P.M. Radmore, Phys. Lett. **90A**, 342, (1982).
- [3] M. V. Satyanarayana, M. Vijayakumar, P. Alsing. Phys. Rev. **A 45**, 5301 (1992).
- [4] W.H. Louisell. *Quantum Statistical Properties of Radiation*, Wiley, 1973.
- [5] R.J. Glauber, in *Proceedings of the Physics of Quantum Electronics*, P.L. Kelly *et. al.*, eds. McGraw-Hill, 1965; G. Lachs, Phys. Rev. **138**, B1012(1965).